Université de Nice | Année 2007-2008
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Travaux dirigés sur les formes bilinéaires et quadratiques

Ces exercices doivent être travaillés avec l'aide du cours sur les formes bilinéaires et quadratiques, voir par exemple Perrin, cours d'algèbre, en particulier les chapitres 5 (paragraphes 1 à 4 et 6) et 8 (paragraphes 1 à 4).

La lettre K désigne un corps de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel sur K.

Classification, orthogonalité, isotropie

1. a) Soit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^3$. Réduire la forme quadratique sur E définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 + 5y^2 - 14z^2 + 6xy + 2xz - 10yz$ par la méthode de Gauss. Quel est sa forme polaire ? Son rang ? Est-elle non-dégénérée ? Quelle est sa signature ?

b) En déduire une base sur laquelle la matrice de cette forme correspond au théorème de classification. Retrouver indépendament ce dernier résultat par la méthode de Gram-Schmidt.

2. a) Déterminer à isomorphisme linéaire près toutes les formes quadratiques sur $E = K^i$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $i = 1, 2, 3$. Même question avec les formes bilinéaires antisymétriques.

b) Donner pour chacune d'elle son rang, sa signature (pour $K = \mathbb{R}$), son noyau.

c) Déterminer le cône isotrope, les sous-espaces totalement isotropes et les sous-espaces totalement isotropes maximaux.

d) Lorsque $K = \mathbb{R}$, dessiner le cône isotrope et l'ensemble des vecteurs unitaires.

3. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique sur E et F un sous-espace quelconque de E.

a) Rappeler la preuve de l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$, ainsi que la condition suffisante d'égalité.

b) Montrer que $\ker \phi \subset F^{\perp}$. En déduire un contrexemple à l'égalité $F = F^{\perp\perp}$ lorsque ϕ est dégénérée et E est de dimension finie.

b) (voir Perrin, exercice 3 page 134) Soit E le sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ composé des suites (x_n) vérifiant $\sum_n x_n^2 < \infty$. Montrer que la forme quadratique $(x_n) \mapsto \sum_n x_n^2$ est non-dégénérée. Soit F le sous-espace de E constitué des suites nulles à partir d'un certain rang ; calculer $F^{\perp}$ et conclure.

4. a) Soit $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ et ϕ une forme définie positive sur E. Déterminer toutes les bases de réduction de ϕ.

b) Plus généralement, montrer lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que l'ensemble des bases réduisant une forme symétrique non dégénérée ϕ sur E est en bijection non-canonique avec le groupe orthogonal $O(\phi)$ de ϕ.

Groupe orthogonal

5. Soit ϕ une forme bilinéaire sur E et $\lambda \in K^*$. Montrer que $O(\phi) = O(\lambda\phi)$.

6. Déterminer $O(\phi)$, où ϕ est une forme quadratique non-dégénérée sur le K-espace vectoriel K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

7. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\phi(x, y) = x^2 + y^2$. Déterminer les matrices des éléments du groupe orthogonal $O(\phi)$ dans la base canonique. Construire un morphisme surjectif $f : \mathbb{R} \to O^+(\phi)$, puis un morphisme $O(\phi) \to \mathbb{R}^*$, et montrer que $O(\phi) \sim (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

8. a) Reprendre l'exercice 7 avec $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ (on montrera la surjectivité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cosh t, \sinh t)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid \phi(x, y) = 1\}$, et on montrera que $O(\phi) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

b) Montrer que $O(\phi) = O(\psi)$ où ψ est la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $\psi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$. Reprendre alors l'exercice 7 et prouver que $O(\psi) = \mathbb{R}^* \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comment ce résultat est il compatible avec celui de (a) ?

9. Reprendre l'exercice 7 lorsque $K = \mathbb{C}$, et $E = \mathbb{C}^2$ (on admettra la bijectivité de l'application $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} \to \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ induite par $(\cos, \sin)\}$) et prouver que $O(\phi) \sim \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

10. Lorsque $K = \mathbb{R}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur la forme quadratique ϕ sur E pour que $O(\phi)$ soit borné. Que dire lorsque $K = \mathbb{C}$?

11. Reprendre l'exercice 7 lorsque ψ est la forme bilinéaire définie par la formule $\psi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$ et montrer que $O(\psi) \sim SL_2(\mathbb{R})$.

12. Soit n un entier et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire définie positive ϕ sur E telle que $G \subset O(\phi)$. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe fini de $O_n(\mathbb{R})$. Mêmes questions pour $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et ϕ hermitienne.