

Travaux dirigés : groupes

1. Soit G un groupe cyclique d'ordre n . Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. [P, p. 10] Soit G un groupe et H un sous-groupe de G . Écrire la relation d'équivalence à droite \sim_H attachée à H , écrire G comme réunion disjointe des classes. En déduire que si G est fini d'ordre n , alors $x^n = 1$ pour tout x de G .
3. [R, 1.1.4 p. 4] On suppose que G est un groupe fini commutatif et que n est un entier annulant G (c'est-à-dire tel que pour tout x de G , on a $x^n = 1$).
 - a) Montrer que pour tout sous-groupe H de G , n annule H et G/H .
 - b) Montrer par récurrence que l'ordre de G divise une puissance de n .
 - c) Soit p premier divisant l'ordre de G . Montrer qu'il divise le ppcm des ordres de tous les éléments de G . En déduire qu'il existe un élément de G d'ordre un multiple de p .
 - d) Conclure qu'il existe un élément de G d'ordre p .
 - e) Le résultat de (d) est-il valable lorsque G n'est pas commutatif ?
4. [R, 1.1.6 p. 6] a) Soit x et y deux éléments d'un groupe G qui commutent. Montrer qu'il existe un élément de G d'ordre le ppcm des ordres de x et y .
 - b) Montrer que si G est commutatif et fini (ce que l'on suppose désormais), alors le plus grand ordre n des éléments de G est aussi le ppcm des ordres de tous les éléments de G .
 - c) Montrer que si pour tout entier d , G contient au plus d éléments d'ordre divisant d , alors G est cyclique.
 - d) Montrer que le groupe des éléments inversibles d'un corps¹ fini est cyclique (cf. développement 64).
 - e) Le résultat de (c) est-il valable lorsque G n'est pas commutatif ?
 - f) Le résultat de (d) est-il valable dans le cas d'un anneau à division² ?

RÉFÉRENCES

[P] Perrin, Cours d'algèbre, Ellipse.

[R] Ramis, Deschamps, Odoux, Algèbre (exercices avec solutions), Masson.

¹On entend ici que la loi multiplicative d'un corps est par définition commutative. Attention, ce n'est pas le cas de certains auteurs qui emploient dans ce cas la terminologie "corps commutatif".

²Encore parfois appelé "corps non-commutatif", cf. note précédente.