PREPARATION A L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES 2007-08
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

TD : INTERVERSION LIMITE ET INTEGRALE

Exercice 1 - Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{2nx^2+7}{x^4+3nx+3}\,dx.$$

Exercice 2 -

1- Pour tout $n \geq 0$, calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x\,dx$.

2- En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 3 - Soit $\theta \neq 0(2\pi)$.

1- Calculer de deux manières différentes $\displaystyle\mathrm{Re}\Big(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}\,dx\Big)$.

2- En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Exercice 4 - Pour $t \geq 0$, on pose $\displaystyle F(t) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$.

1- Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2- Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3- F est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 5 - Soit $f \in C([0,1])$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Exercice 6 - Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\rho \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) f(x-t)\, dt.$$

1- Montrer que $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2- Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en x. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

3- On suppose que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 - On cherche à calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

1- Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Montrer que $F + G^2$ est constante.

2- En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.