Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation Agrégation - Analyse

CONTINUITE UNIFORME.

Ex. 1 : Régularisation.

1) Revoir la preuve de "$\rho_n * f \to f$" où (ρ_n) est une suite régularisante (voir T.D. Weierstrass et Fejèr).

2) *a)* En utilisant que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $1 \le p < \infty$, établir que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\left\| f(\cdot + h) - f \right\|_{L^p} \to 0 \qquad \text{si} \quad h \to 0.$$

b) (re-)Démontrer alors que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $n \to +\infty$. Idem avec le noyau de Fejèr et des fonctions $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique.

Ex. 2 : Les théorèmes de Dini.

1) Voir l'exercice 5 p. 229 dans Gourdon.

2) *1ère application : le théorème de Mercer.* Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X un compact métrique, et $T : X \to \mathcal{H}$ continu. Pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \langle T(x), e_n \rangle$. Montrer que pour tout $x \in X$,

$$|T(x)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|^2,$$

avec convergence uniforme de la série pour $x \in X$.

3) *2ème application : le théorème de Glivenko-Cantelli.* Soit (X_n) une suite de v.a. réelles i.i.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F la fonction de répartition commune des X_n, et on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{X_k \le t}.$$

Nous allons établir que, p.s. quand $n \to +\infty$, $\qquad V_n \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \to 0.$

a) Un cas simple. On suppose ici la loi commune des X_k est la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Etablir que, quand $n \to +\infty$, $F_n(s) \to s$ p.s. avec la loi des grands nombres. En déduire que si $s \in [0,1]$, il existe $N_s \subset \Omega$ négligeable tel que $F_n(s) \to s$ si $n \to +\infty$ sur $\Omega \setminus N_s$. Montrer alors l'existence de $N \subset \Omega$ négligeable tel que $\forall s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $F_n(s) \to s$ si $n \to +\infty$ sur $\Omega \setminus N$. Justifier alors que $\forall s \in [0,1]$, $F_n(s) \to s$ si $n \to +\infty$ sur $\Omega \setminus N$ (on utilisera le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $F_n(s)$ croît avec s). Conclure alors à l'aide du théorème de Dini que

$$\text{p.s.} \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \to 0 \qquad \text{si} \quad n \to +\infty.$$

b) Pour $u \in [0,1]$, on pose $F^{\leftarrow}(u) = \inf F^{-1}([u, +\infty[)$. Vérifier que si $t \in \mathbb{R}$ et $u \in [0,1]$, alors $F^{\leftarrow}(u) \le t$ ssi $u \le F(t)$. Démontrer ensuite que si U suit une loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $F^{\leftarrow}(U)$ suit la loi commune des X_k.

c) Réduction au cas simple. Soit $(\tilde{X}_n)$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$ i.i.d., et $\tilde{V}_n$, $\tilde{F}_n$ les fonctions associées. Déduire de *b)* que V_n a même loi que $W_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \tilde{F}_n\big(F^{\leftarrow}(t)\big) - F^{\leftarrow}(t) \right|$, puis que $W_n \le \tilde{V}_n$ en posant $s = F^{\leftarrow}(t)$. En déduire le résultat.

Ex. 3 : Composition.

On munit $E \equiv \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme du sup. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on regarde l'application

$$F : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$
$$u \mapsto f \circ u.$$

1) On suppose tout d'abord f à support compact.

a) Etablir que F est uniformément continue.

b) On suppose en outre f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer alors que F est différentiable sur E et exprimer sa différentielle simplement (on pourra utiliser une formule intégrale). Démontrer que F est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

2) On revient au cas général. Montrer que F est uniformément continue sur les bornés de E. Justifier que F est continue sur E. On suppose en outre f de classe $\mathcal{C}^1$, montrer alors que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

Ex. 4 : Théorème de Sard dans un cas simple. Soit $I = [a,b]$ un segment, et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_1, \ldots, I_n$ le découpage naturel de I en n segments consécutifs de longueur $\frac{|I|}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ suffisament grand, on a

$$\left|f'(y) - f'(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2|I|}$$

lorsque x et y sont dans un même intervalle I_k.

2) On note $C = \{x \in I,\ f'(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de f.

a) Soit $1 \leq k \leq n$, et supposons $I_k \cap C \neq \emptyset$. Montrer à l'aide de **1)** que $f\big(C \cap I_k\big)$ est inclus dans un intervalle de longueur $\leq \frac{\varepsilon}{n}$ (on majorera $|f'|$ sur I_k).

b) En déduire que l'ensemble des valeurs critiques $f(C)$ de f est un ensemble négligeable, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut l'inclure dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \varepsilon$.

3) Justifier que ceci reste vrai si I est un intervalle quelconque et pas forcément un segment.

Références :

- *Ex. 2 2)* H. Queffelec, Topologie, Dunod; ou Zuily-Queffellec.
- *Ex. 2 3)* Y. Nourdin, Agrégation de mathématiques, épreuve orale ..., Dunod (th. 1.25.9).
- *Ex. 4* F. Rouvière, PGCD, Chap. III, Ex. 42.