

Développement : Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ par plusieurs méthodes.

QUESTION PRÉLIMINAIRE : Montrer que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est une intégrale convergente et que $I = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1. COORDONNÉES POLAIRES ET THÉORÈME DE FUBINI. [G, P.329]

1.1. Soit $a > 0$, en utilisant les coordonnées polaires et le théorème de Fubini, calculer $I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ où $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

1.2. En considérant $\tilde{I}_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ où $C_a = [-a, a]^2$, en déduire la valeur de I .

2. EN UTILISANT LES INTÉGRALES DE WALLIS. [G, P.163]

On rappelle que l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ vérifie $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$.

2.2. Conclure.

3. EN UTILISANT UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRES. [G, P.163]

On étudie la fonction $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ définie sur \mathbb{R}^+ . On pose $f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.

3.1. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}^+ et calculer g' en fonction de f et f' .

3.2. Calculer la limite de g quand $x \rightarrow +\infty$, en déduire celle de f et conclure.

4. EN UTILISANT UNE AUTRE INTÉGRALE À PARAMÈTRES. [L, EX. 10.10]

On étudie la fonction $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{t^2+1} dt$ définie sur \mathbb{R}^+ .

4.1. Montrer que h est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et calculer h' .

4.2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ et calculer $h(0)$.

4.3. Montrer que $h'(x) = h(x) - \frac{I}{2\sqrt{x}}$. Résoudre cette équation par méthode de variation de la constante.

4.4. Conclure.

Développement : Intégrale de Fresnel.

QUESTION PRÉLIMINAIRE : Montrer que $J = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est une intégrale convergente.

5. COORDONNÉES POLAIRES ET THÉORÈME DE FUBINI [G., P. 336]

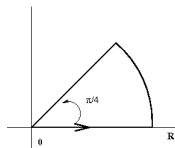
On pose $f(t) = \int_0^t e^{ix^2} dx$. On étudie la fonction $F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)} dx dy$ définie sur \mathbb{R}^+ et on note $G(T) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$.

5.1. Montrer, en passant en coordonnées polaires, que $F(t) = \frac{i\pi}{4} - i \int_0^{\pi/4} \exp\left(i \frac{t^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta$. Exprimer également $F(t)$ à l'aide de f .

5.2. En déduire deux expressions de la limite de $G(T)$ quand $T \rightarrow +\infty$.

5.3. Conclure.

Appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = e^{iz^2}$ sur le lacet γ_R suivant. En déduire la valeur de J .



7. A L'AIDE D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRES [L., EX 10.13]

On pose $h(x) = e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

7.1. Calculer $\int_0^X h(x) dx$ à l'aide du changement de variable $t = ux$, puis du théorème de Fubini.

7.2. En déduire que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X h(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(i+u^2)} du$.

7.3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(i+u^2)} du$ et conclure.

8. INDICATIONS

EXERCICE 1 :

1.2. Utiliser $D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}a}$ et passer à la limite $a \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 2 :

2.1. Utiliser la concavité du logarithme.

2.2. Faire les changements de variable $t = \sqrt{n} \cos x$ et $t = \sqrt{n} \cotan x$.

EXERCICE 3 :

3.2. Montrer l'inégalité $0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$ et utiliser que $g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$.

EXERCICE 4 :

4.4. La méthode de variation de la constante et le changement de variable $t = u^2$ amènent à

$$h(x) = \frac{\pi}{2} e^x - I e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du.$$

EXERCICE 5 :

5.1. Par symétrie, se ramener au demi-carré $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi], 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 < r \leq \frac{t}{\cos \theta}\}$.

5.2. Utiliser la moyenne de Césarò dans un cas et le théorème de Fubini avec le changement de variable $t = u \cos \theta$ dans l'autre.

5.3. Pour montrer que $\text{Im}(J) > 0$, faire le changement de variable $u = x^2$ et découper l'intégrale sur des intervalles appropriés.

EXERCICE 6 : Montrer que pour $x \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$. On en déduira que

$$\int_0^{\pi/4} |iR e^{i\theta} \exp(-iR^2 e^{2i\theta})| d\theta \leq \frac{\pi}{4R} (1 - \exp(-R^2)).$$

EXERCICE 7 :

7.1. On trouve que $\int_0^X h(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(i+u^2)} (1 - e^{-(i+u^2)X^2}) du$.

7.3. Multiplier par la quantité conjuguée et faire une décomposition en éléments simples, en observant que $u^4 + 1 = (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)$. On trouve $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(i+u^2)} du = \frac{\pi}{2} e^{-i\pi/4}$.

9. QUELQUES RÉFÉRENCES

[G] Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.

[L] Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS. Tome Analyse*, Ellipses.

[T] Tauvel, *Analyse complexe : exercices corrigés*, Dunod.