Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Deux Développements, Année 2008-2009

D1a) Inégalité de Carlemann. D1b) Utilisation des séries pour étudier des suites.

Dvlpt D1a (Inégalité de Carlemann)

Préliminaire : Rappeler ce qu'est la transformation d'Abel.

Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n$ converge. On pose $v_n = (u_1 \cdots u_n)^{1/n}$

a) On pose $w_n = \sum_{p=1}^{n} p u_p$.

En utilisant la moyenne arithmético-géométrique, montrer que

$$v_n \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \frac{1}{n} w_n$$

pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que $(n+1)\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \leq e$ pour tout $n \geq 1$. (On pourra remarquer que cela revient à étudier le signe de $s_n = \sum_{p=1}^{n} \ln p - n(\ln(n+1) - 1)$).

c) Faire une transformation d'Abel sur le terme $\sum_{n=1}^{N} w_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

d) Conclure que $\sum v_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Dvlpt D1b (Utilisation des séries : Stirling via Wallis et Equivalent de suite)

1) Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(n+1)I_n = (n+2)I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et que $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

c) Soient $v_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$, $s_n = \ln v_n$ et $u_n = s_n - s_{n-1}$. Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) En déduire que la suite (v_n) converge. On note σ la limite. En considérant la limite de $\frac{\sqrt{2} v_{2n}}{(v_n)^2}$, trouver σ et en déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

2) Soit $u_0 \in]0, \pi/2]$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ pour $n \geq 0$.

a) Montrer que $u_n \in]0, \pi/2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{6} u_n^{2-\alpha}$

c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Remarque : En poussant le développement à des ordres plus élevés, on obtient un développement asymptotique de u_n :

Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{15}$, *et en déduire que* $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$.

Bibliographie : Chambert-Loir, Analyse 1 (D1a), Gourdon (D1b)