Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation Agrégation - Analyse

Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

On souhaite établir le résultat suivant (dit forme géométrique du théorème de Hahn-Banach) :

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A, $B \subset E$ deux convexes non vides et disjoints, avec A ouvert. Alors, il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B \qquad f(x) \leq \alpha \leq f(y).$$

On dit alors que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large.

Ex. 1 : Jauge d'un convexe. Soit $C \subset E$ un convexe ouvert, avec $0 \in \overset{\circ}{C}$. Pour $x \in E$, on définit

$$p(x) \equiv \inf\{\alpha > 0,\ x \in \alpha C\}.$$

1) En utilisant que C est ouvert, montrez que p est bien définie.

2) Montrez que pour $x \in E$ et $\lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

3) Soient x, $y \in E$, et $\varepsilon > 0$. En utilisant que $(p(x) + \varepsilon)^{-1}x \in C$ et $(p(y) + \varepsilon)^{-1}y \in C$, justifier que $p(x + y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. Conclure alors que p est une jauge, appelée la jauge du convexe C.

4) En utilisant que C est ouvert, montrez que $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$.

Ex. 2 : Preuve du théorème.
1) Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \notin C$. On souhaite montrer l'existence de $f \in E'$ non nulle telle que $f(x) < f(x_0)$ pour $x \in C$. Ceci correspond au cas $A = C$ et $B = \{x_0\}$ du théorème de Hahn-Banach géométrique. Faire un dessin. On appelle $\{f = f(x_0)\}$ un hyperplan d'appui de C en x_0.

a) Se ramener par translation au cas $x_0 = 0$. On considère alors la jauge p de C. Montrer que $g : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ définie par $g(tx_0) = t$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0$ telle que $g \leq p$.

b) A l'aide du théorème de Hahn-Banach forme analytique, en déduire le résultat.

2) On définit $C \equiv A - B = \{x - y, x \in A,\ y \in B\}$. Démontrer que C est convexe, ouvert (l'écrire comme une réunion d'ouverts), et que $0 \notin C$. Conclure.

Ex. 3 : Seconde forme géométrique de Hahn-Banach. Soient A, $B \subset E$ deux convexes disjoints. On suppose que A est compact et que B est fermé.

1) Montrez quil existe $\varepsilon > 0$ tel que $A_\varepsilon \equiv A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon \equiv B + B(0, \varepsilon)$ sont deux ouverts disjoints (raisonner par l'absurde avec $\varepsilon = 1/n$).

2) En appliquant la première forme de Hahn-Banach à A_ε et B_ε, montrez qu'il existe $\alpha < \beta$ tels que, pour $x \in A$ et $y \in B$,

$$f(x) \leq \alpha < \beta \leq f(y).$$

Référence : H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications.* Dunod/Masson.