

Théorème de Hahn-Banach (version analytique).

On considère E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie, V un sous-espace de E , et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur V . Le théorème de Hahn-Banach (version analytique) affirme qu'il existe une forme linéaire $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur E telle que

(i) $F = f$ sur V ,

(ii) $\|F\|_{E^*} = \|f\|_{V^*}$.

On rappelle que

$$\|f\|_{V^*} = \sup \{ |f(x)|, x \in V, \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ |f(x)|, x \in V, \|x\| = 1 \}.$$

1) a) Montrer que sans la contrainte (ii), le problème est relativement facile.

b) Vérifier que si la forme linéaire $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ prolonge f , alors $\|F\|_{E^*} \geq \|f\|_{V^*}$.

2) On suppose dans cette question que E est euclidien. Déterminer un moyen canonique de construire une telle forme linéaire F (on pourra aussi penser à écrire simplement les formes linéaires sur un espace euclidien).

3) a) On note $M = \|f\|_{V^*}$, et on se donne $u \in E$. Montrer que pour tous $x, y \in V$,

$$f(x) - M\|x - u\| \leq f(y) + M\|y - u\|,$$

en considérant la différence des deux membres. En déduire l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in V$, on ait

$$(*) \quad f(x) - M\|x - u\| \leq a \leq f(y) + M\|y - u\|.$$

b) On suppose que $u \in E \setminus V$. On définit $g : V \oplus \mathbb{R}u \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x + tu) = f(x) + at$ (pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in V$). Vérifier que g est une forme linéaire qui prolonge f à $V \oplus \mathbb{R}u$. En utilisant (*) avec $y = x$, établir que pour tout $x \in V$,

$$|g(x - u)| \leq M\|x - u\|.$$

En déduire que pour $x \in V, t \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(x + tu)| \leq M\|x + tu\|.$$

On pourra factoriser t . Conclure alors que g prolonge f à $V \oplus \mathbb{R}u$ et a la même norme.

c) Etablir le théorème de Hahn-Banach (dans le cas où E est de dimension finie).

4) **Application.** a) Montrer que pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \max \{ F(x), F \in E^*, \|F\|_{E^*} = 1 \}.$$

On pourra penser à prolonger la forme linéaire $f : \mathbb{R}x \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(tx) = t\|x\|$.

b) En déduire que l'application $J : E \rightarrow (E^*)^*$ définie pour $x \in E$ par $J(x) : E^* \ni F \rightarrow F(x) \in \mathbb{R}$ (on a bien $J(x)$ forme linéaire sur E^*) est une isométrie.

5) On considère une *jauge* $p : E \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction positive vérifiant

$$\forall x, y \in E, \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \forall \lambda > 0, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

En suivant **3**) établir le théorème suivant, où l'on a remplacé la norme $\|\cdot\|$ par la jauge p : si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel V de E , et telle que $f \leq p$ sur V , alors il existe une forme linéaire $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f et telle que $F \leq p$ sur E . Quel est le lien avec le résultat de **3**) (préciser la jauge) ?

6) On considère E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} . On le note $E_{\mathbb{R}}$ lorsqu'il est muni de sa structure réelle. soit V un sous-espace vectoriel sur \mathbb{C} de E et on considère une forme \mathbb{C} -linéaire $f : V \rightarrow \mathbb{C}$. Nous allons montrer que le théorème de Hahn-Banach reste vrai dans ce cadre.

a) Vérifier que $g \equiv \operatorname{Re}(f)$ est une forme \mathbb{R} -linéaire sur $E_{\mathbb{R}}$. Justifier aussi que pour $x \in E$, $f(x) = g(x) - ig(ix)$. En déduire que $\|g\|_{E_{\mathbb{R}}} = \|f\|_{E^*}$.

b) Par le théorème de Hahn-Banach (réel), il existe une forme \mathbb{R} -linéaire $G : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ sur $E_{\mathbb{R}}$ prolongeant g et de même norme. Montrer que $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $F(x) = G(x) - iG(ix)$ répond au problème.

Ce théorème reste vrai en dimension infinie sous la forme suivante (voir [BRÉZIS] par exemple) : Soit E un espace vectoriel normé, V un sous-espace de E et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire *continue* sur V . Alors il existe une forme linéaire continue $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ prolongeant f et de même norme.

La preuve utilise le Lemme de Zorn, pour remplacer l'argument en dimension finie de **3**) c).

Référence : F. ROUVIÈRE, *PGCD*. Cassini.