

### Intégrales à paramètre et holomorphie.

**Ex. 1.**

1) La fonction  $J_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de Bessel est donnée par  $J_0(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta$ .

a) Montrer que  $J_0$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

b) Retrouver le fait que  $J_0$  est une fonction entière en utilisant le développement en série entière de  $\cos$ , ou en remarquant que  $2J_0(x) = \int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \theta) d\theta$ .

2) Soit la fonction  $f(x) = \int_0^1 t^{-x}(1-t)^{x-1} dt$ . Etablir que  $f$  est bien définie sur  $]0, 1[$  et admet un prolongement holomorphe sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  que l'on déterminera.

3) On considère la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln(t) dt.$$

a) Montrer que cette fonction est bien définie et admet un prolongement holomorphe  $F$  dans un ensemble à préciser.

b) En intégrant par parties  $F'$ , déterminer une équation différentielle *holomorphe* sur  $F$ . Exprimer  $F$  à l'aide de  $f(1)$  ( que l'on ne cherchera pas à calculer ). En déduire que  $F$  admet un prolongement holomorphe sur un ensemble à préciser.

4) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable telle que  $|f(x)| \leq e^{-|x|}$ . Démontrer que sa transformée de Fourier  $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$  a ses zéros isolés ( ou alors ... ). On pourra justifier un prolongement holomorphe de  $\hat{f}$ .

**Ex. 2 : Une base Hilbertienne.**

On note  $\mu$  la mesure sur  $\mathbb{R}^+$  à densité  $e^{-x}$ , i.e.  $d\mu = e^{-x}dx$  sur  $\mathbb{R}^+$ . On travaille dans l'espace

$$L^2(\mu) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable } \int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

1) Vérifier que les fonctions polynômiales sur  $\mathbb{R}^+$  sont dans  $L^2(\mu)$ . Les polynômes orthogonaux associés s'appellent les *polynômes de Laguerre*. On se propose de montrer que ces polynômes forment un ensemble total.

Soit donc  $f \in L^2(\mu)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} f(x)x^n d\mu(x) = \int_0^{+\infty} f(x)x^n e^{-x} dx = 0$ .

2) On considère la fonction  $F(t) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-itx} d\mu(x)$ .

a) Vérifier que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $F$  admet un prolongement holomorphe dans le demi-plan  $\{ \text{Im}(z) < \frac{1}{2} \}$ . On pourra pour cela travailler avec Cauchy-Schwarz dans  $L^2(\mu)$  ou écrire  $f(x)e^{-itx}e^{-x} = (f(x)e^{-x/2}) \times (e^{-itx}e^{-x/2})$ .

c) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{(n)}(0)$ . Qu'en déduit-on pour  $F$  dans le demi-plan en question ?

d) Conclure que  $f \equiv 0$ , puis le résultat.

3) Justifier que l'ensemble des fonctions ( sur  $\mathbb{R}^+$  ) du type  $x \mapsto e^{-x/2}P(x)$  où  $P \in \mathbb{C}[X]$  est une famille totale dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . On pourra pour cela vérifier que  $L^2(\mu)$  et  $L^2$  sont naturellement isométriques.