Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 231, Année 2008-2009

Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

Remarques sur la leçon

Comme son titre l'indique clairement, il s'agit d'une leçon d'*exemples*, ce qui veut dire que les résultats généraux et les théorèmes sur les séries sont hors-sujet. Les différents résultats doivent rester sous-jacent, par exemple à travers le plan, et seuls des exemples et des contre-exemples doivent être écrit dans le plan.

Il est nécessaire de fournir des exemples et contre-exemples sur les points suivants :

- Propriétés algébriques (somme, produit par constante, produit de Cauchy, comparaison,...)
- Terme général vers 0 ?, CVA et CV
- Séries à termes positifs (Sommes partielles majorées, critère de Cauchy, de D'alembert, de Raabe-Duhamel)
- Séries à termes quelconques (équivalence, CSA, Abel, Commutativité, Associativité, équivalence des restes,...)

La leçon est facile *si* on l'a préparé avant et difficile sinon. Il serait souhaitable ici de proposer trois développements, car les techniques sont assez faciles à se remémorer pendant le temps de préparation, néanmoins pour cela il faut d'autant plus avoir travailler à fond ces développements pendant l'année !

La bibliographie proposée pour la leçon est :

- Chambert-Loir , Fermigier, Maillot, Analyse 1
- Combes, Suites et séries
- Gelbaum, Olmstad, Counterexamples in analysis
- Gourdon
- Hauchecorne, Contre-exemples en mathématiques
- Leichtman, Schauer, Exercices X, ENS, tome 3
- Pommelet
- Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4

Exercice 1 [Dvlpt] (Comparaison série-intégrale et série harmonique)

1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge.

a) Montrer que $f \geq 0$.

b) Montrer que pour $x \geq 0$, $$x \sum_{n=1}^{N} f(nx) \leq \int_0^{+\infty} f,$$

et en déduire la convergence de $\sum f(nx)$ pour tout $x > 0$.

2) Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$,

a) Montrer que H_n est équivalent à $\ln n$ quand $n \to +\infty$.

b) On pose $U_n = H_n - \ln n$. En trouvant un équivalent de $U_{n+1} - U_n$, montrer que la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est convergente. En déduire que la suite de terme général U_n est convergente, on note γ sa limite.

c) On pose $V_n = H_n - \ln n - \gamma$. Montrer que la série de terme général $V_{n+1} - V_n$ est convergente en donnant un équivalent de $V_{n+1} - V_n$.

d) Lorsque $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, sous quelles hypothèses peut-on comparer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$. Même question pour $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

e) En utilisant les deux questions précédantes, montrer que V_n est équivalent à $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

f) Conclure que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2n}\right)$.

Exercice 2 (Quelques exemples et contre-exemples)

1) Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ où
a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$, b) $u_n = \dfrac{nn!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$, c) $u_n = \dfrac{1}{3^n}$ si n est pair, et $\dfrac{4}{3^n}$ si n est impair.

2) Etudier la convergence des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et de leur série produit de Cauchy $\sum u_n$ où
a) $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, b) $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, $a_n = 2^n$ et $b_n = 1$ pour $n \geq 1$.

Exercice 3 (Intégrales et séries)

Donner un exemple de fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telles que
a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ diverge, b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge.

Exercice 4 (Exercices de type Oral)

1) Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $(l^p)'$ s'identifie à $l^{p'}$.

2) Etudier la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right)$.

3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-k/(k+1)}$. Donner un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

4) Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} k \ln k$.

5) Soit $u_0 > 0$ et la suite définie par $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ avec $0 < a < b$. Calculer la somme de la série dans les cas de convergence. (Donner un équivalent de u_n en prouvant que le ln de $w_n = n^{b-a} u_n$ converge. Montrer ensuite que $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n \geq 0} v_n$ avec $v_n = n(u_n - u_{n+1}$.)