## Parties Convexes & Fonctions Convexes d'une ou plusieurs Variables.

**Ex. 1 : Fonctions convexes dans $\mathbb{R}^N$.** Avec la norme $\|x\| = \sum_{j=1}^{N} |x_j|$ dans $\mathbb{R}^N$, on considère $f : B_2 \to \mathbb{R}$ convexe.

**1)** *a)* Montrer que $f$ est majorée sur la "sphère" $\{x,\ \|x\| = 1\}$ en écrivant $x$ comme barycentre de $\pm e_1, \dots, \pm e_N$, avec $(e_1, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

*b)* Pour $x \in \bar{B}_1$, $x \neq 0$, on note $u = \frac{x}{\|x\|}$, et $\varphi : [-1,1] \ni t \to f(tu)$. Vérifier que $\varphi$ est convexe. En encadrant $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ pour $t \in [-1,1]$, $t \neq 0$, en déduire que $f$ est continue en 0.

*c)* Justifier que $f$ est bornée sur $\{x,\ \|x\| \leq 1\}$, et montrer que $f$ est Lispchitzienne sur $\bar{B}_{1/2}$ ( on utilisera des accroissements dans les directions parallèles aux axes de coordonnées ).

**2)** Généraliser pour montrer que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert convexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $f$ est continue sur $\Omega$, et même localement Lipschitzienne dans $\Omega$.

**Ex. 2 : Convexité : caractérisations et extrema.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction sur un *ouvert* convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

**1)** On suppose $f$ différentiable sur $\Omega$.

*a)* Montrer que $f$ est convexe si et seulement si pour tous $x,\ y \in \Omega$, $\qquad f(y) - f(x) \geq df_x(y - x)$.

$\Rightarrow$ poser $g(t) = f\big((1-t)x + ty\big)$, $t \in [0,1]$, montrer que $g$ est convexe, et majorer $\frac{g(t)-g(0)}{t}$.

$\Leftarrow$ si $x,\ y \in \Omega$ et $t \in [0,1]$, $z = (1-t)x + ty$, utiliser les inégalités obtenues avec $(z,x)$ et $(z,y)$.

*b)* En déduire que si $a \in \Omega$, alors $a$ est un point critique de $f$ si et seulement si $a$ est un minimum de $f$, si et seulement si $a$ est un minimum local de $f$. Est-il nécessairement un minimun strict ?

*c)* Montrer que si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et coercive ( *i.e.* $f(x) \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$ ), alors $f$ a un unique minimum. *Exemple :* $A$, $B$, $C$ sont dans le plan, et $f(M) = \|M - A\| + \|M - B\| + \|M - C\|$ ).

**2)** On suppose $f$ deux fois différentiable sur $\Omega$ ( on peut envisager de classe $\mathcal{C}^2$ pour simplifier ). Montrer que $f$ est convexe si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, la forme quadratique $h \mapsto d^2 f_x(h,h)$ est positive.

$\Rightarrow$ appliquer une formule de Taylor à $f\big(x + th\big)$, et utiliser **1)** *a).*

$\Leftarrow$ appliquer une formule de Taylor à $g(t) = f\big(x + th\big)$, et utiliser **1)** *a).*

**3)** Voir Gourdon, Pb. 3 p. 339 pour un problème de minimisation d'une fonction convexe coercive.

**Ex. 3 : Convexité et valeurs propres.** Pour $A \in \mathcal{S}_n$, on désigne par $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ ses valeurs propres.

**1)** Justifier les caractérisations ( de Courant-Fisher ), où $\|x\| = \|x\|_2$ :

$$\lambda_1(A) = \min_{\|x\|=1} (Ax, x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_n(A) = \max_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

**2)** En déduire que $\lambda_1 : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ ( resp. $\lambda_n : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ ) est une fonction concave ( resp. convexe ).

**Ex. 4 : Convexité et matrices.**

**1)** Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ ( resp. $\mathcal{H}_n^+$ et $\mathcal{H}_n^{++}$ ) sont des ensembles convexes.

**2)** Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \big(\det(A)\big)^{-\frac{1}{2}}$ de l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}$ des matrices $n \times n$ symétriques définies positives dans $\mathbb{R}_+^*$ est strictement convexe ( on pourra songer à considérer le logarithme ).

*Plusieurs indications possibles :*

$\star$ Commencer par montrer l'inégalité $\ln\circ\varphi\big(tA_1 + (1-t)A_0\big) < t\ln\circ\varphi(A_1) + (1-t)\ln\circ\varphi(A_0)$ lorsque $A_0 = I_n$. On se ramènera à ce cas grâce à : si $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe $B_0 \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $A_0 = B_0^{-2}$.

$\star$ Utiliser un résultat de réduction simultanée : si $A$ et $B$ sont des matrices $n \times n$ symétriques avec $A$ définie positive, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale telles que

$$A = {}^tPP \qquad \text{et} \qquad B = {}^tPDP.$$

**3)** A l'aide des mêmes indications, démontrer le résultat suivant :

Si $A$ et $B$ sont des matrices réelles $n \times n$ symétriques et positives, alors

$$\big(\det(A)\big)^{\frac{1}{n}} + \big(\det(B)\big)^{\frac{1}{n}} \leq \big(\det(A+B)\big)^{\frac{1}{n}},$$

et qu'il n'y a égalité que si $A$ et $B$ sont positivement proportionnelles. En particulier, $A \mapsto \big(\det(A)\big)^{\frac{1}{n}}$ est convexe sur $\mathcal{S}_n^+$.

**4)** *Autre preuve de* **1)**. Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, montrer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(Ax, x)\right) dx = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}}.$$

En déduire le résultat de **1)**.

**Références :**

- *Ex. 1* : Gourdon, Pb. 3 p. 339.
- *Ex. 2* : F. Rouvière, *PGCD, 2ème édition.* Ex. 42 p. 100 et Ex. 108 p. 319.
- *Ex. 4 1)* : Sujet Math. Géné. 2001 ( extrait ).