## Polynômes Orthogonaux.

On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et une *fonction poids* $\omega : I \to \mathbb{R}_+^*$. On désigne par

$$\mathcal{H} \equiv L^2\big(I, \omega(x)dx\big),$$

( pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ) muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_I fg\omega dx$ et de la norme $\big|\cdot\big|$ associée. On suppose le poids $\omega$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_I |x|^n \omega(x)\ dx < +\infty$.

**Ex. 1 : Polynômes orthogonaux & racines.**

**1)** Justifier qu'alors $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{H}$. Vérifier aussi que dans les exemples de la fin de la feuille, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_I |x|^n \omega(x)\ dx < +\infty$.

**2)** *a)* Etablir l'existence de suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$(i)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ et $\tilde{P}_n$ sont de degré $n$;

$(ii)$ si $m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, $\langle P_n, P_m\rangle = \langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_m\rangle = 0$;

$(iii)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est unitaire, et $|\tilde{P}_n| = 1$.

Y a-t-il unicité ? Quel est le lien entre $P_n$ et $\tilde{P}_n$ ?

*b)* Pourquoi a-t-on alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(P_0, ..., P_n) = \mathrm{Vect}(\tilde{P}_0, ..., \tilde{P}_n)$ ? Et $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}(P_n, n \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(\tilde{P}_n, n \in \mathbb{N})$ ?

*c)* Montrer ensuite que si $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\deg(Q) < n$, alors $\langle P_n, Q\rangle = 0$.

**3)** Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on note $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ les racines de $P_n$ qui sont dans $\mathring{I}$ et de multiplicité *impaire* ( il se peut que $k$ soit nul ). Quel est le degré de $Q \equiv \displaystyle\prod_{i=1}^{k} X - \alpha_i$ ? Quel est le signe de $P_n Q$ ? Conclure alors à l'aide de **2)** *c)* que $k = n$, puis que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ a ses racines *réelles, simples, et dans* $\mathring{I}$.

**Ex. 2 : Méthode de Gauss pour l'intégration numérique.** On considère ici pour l'intervalle $I$ un *segment*. Etant donnés $k+1$ points $(x_i)_{0\leq i\leq k}$ dans $I$ et $k+1$ réels $(\lambda_i)_{0\leq i\leq k}$, on appelle *formule d'intégration numérique* l'expression, pour $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

$$\mathcal{I}(f) \equiv \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i),$$

et on souhaite que $\mathcal{I}(f)$ soit une ( bonne ) approximation de $\displaystyle\int_I f\omega\ dx$. Pour mesurer la qualité de cette approximation $\displaystyle\int_I f\omega\ dx \simeq \mathcal{I}(f)$, on définit l'*ordre* comme étant le plus grand $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_N[X], \quad \mathcal{I}(P) = \int_I P\omega\ dx,$$

autrement dit si l'erreur d'approximation est nulle pour les polynômes de degré $\leq N$.

**1)** Justifier qu'une formule d'intégration numérique à $k+1$ points ne peut pas être d'ordre $> 2k+1$. Pour cela, on construira à partir des $(x_i)_{0\leq i\leq k}$ un polynôme de degré $2k+2$ et positif, et ...

**2)** On suppose la formule d'intégration numérique à $k+1$ points d'ordre $2k+1$, et on définit $Q_k \equiv \prod_{i=0}^{k} X - x_i$.
Pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq k$, calculer $\langle Q, Q_k\rangle$ à l'aide de $\mathcal{I}$, et en déduire que $Q_k$ est "le" polynôme orthogonal de degré $k+1$ pour le poids $\omega$. Que sont alors les $x_i$ ? Montrer que les $\lambda_i$ sont uniques ( on pourra calculer $\mathcal{I}(L_j)$, où $L_j$ est un polynôme d'interpolation de Lagrange ).

**3)** Réciproquement, on considère $P_{k+1}$ le $k+2$-ième polynôme orthogonal pour le poids $\omega$, et $(x_i)_{0\leq i\leq k}$ ses racines ( qu'utilise-t-on ? ). On note $(L_j)_{0\leq j\leq k}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange relatifs aux $(x_i)_{0\leq i\leq k}$, et on note $\lambda_j \equiv \int_I L_j\omega\, dx$.

*a)* Justifier que si $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\int_I P\omega\, dx = \mathcal{I}(P)$. On pourra utiliser les polynômes $(L_j)_{0\leq j\leq k}$. Qu'en déduire sur l'ordre de cette méthode ?

*b)* Soit désormais $P \in \mathbb{R}_{2k+1}[X]$, et notons $P = QP_{k+1} + R$ sa division euclidienne par $P_{k+1}$. Pourquoi a-t-on $\int_I P\omega\, dx = \int_I R\omega\, dx$ ? D'autre part, exprimer $\int_I R\omega\, dx$ à l'aide des $P(x_i)$. Conclure que cette méthode est d'ordre $= 2k+1$. En utilisant les polynômes $L_j$, justifier que $\lambda_j > 0$.

**Ex. 3 : Entrelacement des zéros.** On souhaite démontrer que si $(\tilde{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes orthogonaux ( unitaires ) pour le poids $\omega$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les zéros de $\tilde{P}_n$ sont strictement entre les zéros de $\tilde{P}_{n+1}$. On désigne par $\gamma_n X^n$ le terme dominant de $\tilde{P}_n$, $\gamma_n > 0$.

**1)** Démontrer l'existence de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad \tilde{P}_{n+2} = (a_nX - b_n)\tilde{P}_{n+1} + c_n\tilde{P}_n$. On pourra écrire la division euclidienne de $\tilde{P}_{n+2}$ par $\tilde{P}_{n+1}$, et justifier que le reste est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Exprimer $a_n$ et $c_n$ à l'aide des $\gamma_i$.

**2)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq y \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{n} P_i(x)P_i(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$.
*Indication : récur(r)ez !*

**3)** Justifier alors que $W \equiv P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer alors le résultat.

**Exemples :** Voici quelques exemples classiques de fonctions poids $\omega$, et le nom des polynômes orthogonaux associés.

| | | |
|---|---|---|
| $\star\ I = [-1,1]$, $\quad \omega(x) = 1$ | *Legendre* | $\mathcal{L}_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$; |
| $\star\ I = ]-1,1[$, $\quad \omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | *Tchebycheff ( 1ère espèce )* | $T_n(x) = c_n \cos\big(n\arccos(x)\big)$; |
| $\star\ I = ]-1,1[$, $\quad \omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ | *Tchebycheff ( 2ème espèce )* | $U_n(x) = c_n \frac{\sin\big((n+1)\arccos(x)\big)}{\sin\big(\arccos(x)\big)}$; |
| $\star\ I = [0,+\infty[$, $\quad \omega(x) = e^{-x}$ | *Laguerre* | $L_n(x) = c_n e^x \frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x}x^n\Big)$; |
| $\star\ I = \mathbb{R}$, $\quad \omega(x) = e^{-x^2}$ | *Hermite* | $H_n(x) = c_n(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2/2}\Big)$. |

**Références :**

• M. Crouzeix & A. Mignot, *Analyse Numérique des Equations Differentielles. Ch. 1*-6 pour **Ex. 1** et *Ch. 2*-4 pour **Ex. 2**.
• **Ex. 3** Chambert-Loir & al. , *Exercices d'Analyse - II ( 2ème Ed. )*, Ex. 20.6.