Université de Nice-Sophia Antipolis
Agrégation Externe de Mathématiques
2008/2009
F.Robert

TD: Polynômes

Soit K un corps (commutatif!). Tous les polynômes considérés sont des éléments de l'anneau de polynômes $K[X]$.

Exercice 0: Définition de $K[X]$. Définition de X. Définition du pgcd.

Exercice 1: Effectuez la division euclidienne de $4X^3 + X^2$ par $X + 1$ et de $(X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 1$ par $(X - 1)(X - 2)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 2: Déterminez $pgcd(X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + X - 1, X^5 + X^4 + 2X^2 - 1)$ et $pgcd(X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1)$.

Exercice 3: Déterminez les polynômes U, V tels que $U \times (X^7 - X - 1) + V \times (X^5 + 1) = 1$ avec $deg(U) < 5$ et $deg(V) < 7$.

Exercice 4: En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminez $pgcd(X^m - 1, X^n - 1)$ pour $m, n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 5: Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\pi$ et $m \in \mathbb{N}^\star$, on définit $P_{m,\theta} = X^{2m} - 2X^m \cos(m\theta) + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Factorisez $P_{m,\theta}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $pgcd(P, P') \neq 1$. Montrez que P admet une racine double.

Exercice 7: Décomposez $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ en facteurs premiers.

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, soient $a_1, ..., a_n \in K$ des éléments distincts et soient $b_1, ..., b_n \in K$.

(a) Montrez qu'il exists un seul polynôme $\Lambda \in K_{n-1}[X]$ tel que $\Lambda(a_i) = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

(b) Déterminez l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(a_i) = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 9: Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $XR^2 = P^2 - XQ^2$. Montrez que $P = Q = R = 0$.

Exercice 10: Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Donnez une condition nécéssaire et suffisante sur $P \in \mathbb{R}[X]$ pour que P divise $A^2 + B^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11: Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Montrez que (A divise B dans $\mathbb{R}[X]$) ssi (A divise B dans $\mathbb{C}[X]$).

Exercice 12: Les polynômes cyclotomiques. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note μ_n l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On pose alors

$$\phi_1(X) = X - 1 \text{ et } \phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n} (X - \zeta).$$

(a) quel est le degré de ϕ_n?
(b) démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(X).$$

(c) En déduire que $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.