Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. On cherche à calculer la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système $Ax = b$.

1. Cas des matrices triangulaires

Exercice 1 : Méthode de remontée. Ecrire `l'algorithme de remontée` qui permet de résoudre un système $Ax = b$ avec A une matrice triangulaire supérieure.

L'algorithme équivalent pour une matrice triangulaire inférieure s'appelle `l'algorithme de descente`. Ces deux algorithmes se calculent en un équivalent de $\mathbf{n^2}$ **opérations**.

2. Méthode de l'élimination de Gauss

Le principe est de transformer le système $Ax = b$ en un système $MAx = Mb$ où la matrice MA est triangulaire supérieure et d'utiliser ensuite une méthode de remontée pour résoudre le système.

Théorème 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Il existe (au moins) une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure.*

Exercice 2 : Démonstration du théorème. On effectue la k-ème étape de l'élimination.

Soit A_k une matrice de la forme suivante $A_k = \begin{pmatrix} A^k_{1,1} & A^k_{1,2} & \dots & \dots & \dots & A^k_{1,n} \\ 0 & A^k_{2,2} & & & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & (0) & 0 & A^k_{k,k} & \dots & A^k_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^k_{n,k} & \dots & A^k_{n,n} \end{pmatrix}$ et telle que $\det(A_k) = \pm \det A$.

2.1. Dans le cas où $A^k_{k,k} \neq 0$, trouver une matrice E_k telle que $\det(E_k) = 1$ et telle que la matrice $A_{k+1} = E_k A_k$ soit de la forme $A_{k+1} = \begin{pmatrix} A^k_{1,1} & A^k_{1,2} & \dots & \dots & \dots & A^k_{1,n} \\ 0 & A^k_{2,2} & & & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & (0) & 0 & A^{k+1}_{k+1,k+1} & \dots & A^{k+1}_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^{k+1}_{n,k+1} & \dots & A^{k+1}_{n,n} \end{pmatrix}$.

2.2. Que se passe-t-il dans le cas où $A^k_{k,k} = 0$?

On peut décider de choisir à chaque étape le pivot le plus grand possible, c'est-à-dire de prendre à la k-ème étape comme pivot l'élément de la k-ème colonne défini ainsi $\left|A^k_{i_0,k}\right| = \max_{i \geq k} \left|A^k_{i,k}\right|$, puis d'effectuer une permutation de la k-ème ligne et de la i_0-ème ligne. C'est `la méthode du pivot partiel` (cf exercice 5). On notera P_k la matrice de permutation.

En effectuant les $n-1$ étapes nécessaires à l'élimination, on trouve finalement une matrice $A_n = E_{n-1}P_{n-1} \dots E_1 P_1 A$ triangulaire supérieure ; on note $M = E_{n-1}P_{n-1} \dots E_1 P_1$. $\square$

La méthode de l'élimination de Gauss nécessite un équivalent de $\mathbf{\frac{2n^3}{3}}$ **opérations.**

3. Factorisation LU d'une matrice

Théorème 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que les n sous-matrices diagonales* $\Delta_k = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ *soient inversibles. Alors il existe une unique factorisation $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure telle que $L_{i,i} = 1$, $1 \leq i \leq n$ et U est une matrice triangulaire supérieure.*

Exercice 3 : Démonstration du théorème.
3.1. Montrer l'unicité d'une telle décomposition.
3.2. Utiliser la méthode de l'élimination de Gauss sans permutation pour prouver le théorème.
3.3. Montrer la réciproque du théorème.
3.4. Donner la forme explicite de la matrice L. □

Pour trouver la solution $x \in \mathbb{R}^n$ d'un système $Ax = b$ en connaissant la décomposition LU de la matrice A, on résout successivement les deux sous-systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$, qui sont des systèmes avec des matrices triangulaires et que l'on sait donc résoudre facilement.

La décomposition LU d'une matrice A nécessite également un équivalent de $\mathbf{\frac{2n^3}{3}}$ **opérations**, mais la résolution des deux sous-systèmes avec des matrices triangulaires nécessite $2n^2$ opérations. La décomposition LU est donc intéressante pour résoudre plusieurs systèmes avec la même matrice A et des seconds membres différents. C'est le cas par exemple du calcul de l'inverse d'une matrice.

Remarque 1 : On aurait également pu prouver le théorème suivant : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice de permutation P, une matrice triangulaire inférieure L telle que $L_{i,i} = 1$, $1 \leq i \leq n$ et U est une matrice triangulaire supérieure telles que $PA = LU$.

Remarque 2 : Si la matrice A est une matrice creuse (c'est-à-dire avec de nombreux coefficients nuls), les deux matrices L et U le sont aussi (cf exercice 6).

Remarque 3 : On trouve deux applications de la décomposition LU au calcul de déterminant par blocs et au calcul de l'inverse d'une matrice par blocs dans le livre de Serre.

4. Factorisation de Choleski d'une matrice

Dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive, la décomposition LU peut encore être améliorée, en choisissant deux matrices L et U qui sont la transposée l'une de l'autre.

Théorème 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors il existe (au moins) une matrice B triangulaire inférieure telle que $A = BB^T$. De plus, si la matrice B est telle que $B_{i,i} > 0$, $1 \leq i \leq n$, la factorisation est unique.*

Exercice 4 : Démonstration du théorème.
4.1. Montrer l'unicité.
4.2. Montrer l'existence de la matrice B en utilisant la décomposition LU de la matrice A.
4.3. Montrer la réciproque du théorème. □

La décomposition de Choleski d'une matrice A nécessite un équivalent de $\mathbf{\frac{n^3}{6}}$ **opérations**, c'est-à-dire 4 fois moins d'opérations que pour la décomposition LU. De plus, son stockage nécessite deux fois moins de mémoire que la décomposition LU.

Remarque 4 : On aurait également pu prouver le théorème en procédant par récurrence sur la taille de la matrice (cf livre de Schatzman).

5. Exercices supplémentaires

Exercice 5 : Méthode de Gauss et choix du pivot

Lascaux-Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.

Supposons que les nombres soient représentés avec 3 chiffres significatifs, c'est-à-dire $n = \pm 0.xyz10^e$ avec $x, y, z, e \in \mathbb{N}$. Soit le système $Au = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.1. Résoudre le système par la méthode de Gauss avec comme pivot la composante 10^{-4} de la première ligne, puis avec la composante 1 de la seconde ligne.

5.2. Calculer les conditionnements cond_1, cond_∞ de la matrice exacte obtenue à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour les deux choix de pivot possibles.

Exercice 6 : Décompositions LU et de Choleski des matrices bandes

Ciarlet, Miara et Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation.

A est une `matrice p-bande` si $A_{i,j} = 0$ pour $|i - j| \geq p$. Montrer que la décomposition LU préserve la structure des matrices-bandes. En déduire qu'il en est de même pour la décomposition de Choleski.

6. Références

Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.

Ciarlet, Miara et Thomas, *Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation*, Masson.

Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Dunod.

Schatzman, *Analyse numérique*, Dunod.

Serre, *Les matrices*, Dunod.