Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. On cherche à calculer la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système $Ax = b$ comme limite d'une suite de solutions approchées. Pour cela, on utilise le principe de la méthode du point fixe et on réécrit l'équation $Ax = b$ en exprimant A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible. On peut alors réécrire le système $Ax = b$ sous la forme $x = M^{-1}(Nx + b)$ et utiliser, si elle converge, la méthode itérative suivante :

(M) on se donne un vecteur initial x_0 et on définit la suite $x^{k+1} = M^{-1}(Nx^k + b)$, $k \geq 0$.

Remarque 1 : En pratique, on ne calcule bien sûr pas l'inverse de la matrice M, mais on résout à chaque pas un système linéaire avec la matrice M. On choisit donc en général M comme une matrice diagonale ou triangulaire.

Définition 1. *On dit que la méthode itérative* (M) *est convergente si quel que soit le vecteur initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et quel que soit le second membre $b \in \mathbb{R}^n$, la suite $\left(x^k\right)_{k\geq 0}$ définie par la méthode* (M) *converge vers $x = A^{-1}b$.*

1. Critère de convergence

Lemme 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.*
(i) Pour toute norme matricielle $|||.|||$, on a $\rho(A) \leq |||A|||$.
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée $|||.|||$ telle que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Lemme 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ ssi $\rho(A) < 1$.*

Démonstrations : Voir les démonstrations de ces deux lemmes dans le livre de Ciarlet.

Théorème 1. *La méthode itérative* (M) *converge ssi le rayon spectral $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Exercice 1 : Démonstration du théorème

Si $x = A^{-1}b$, montrer que $x^k - x = M^{-1}N\left(x^{k-1} - x\right)$ et conclure.□

2. Quelques méthodes classiques

On note $A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$ et on suppose que D est inversible.

2.1. **Méthode de Jacobi.** On choisit comme matrice M la matrice diagonale $M = D$ et donc la matrice $N = E + F$. La matrice d'itération vaut $J = M^{-1}N = D^{-1}(E + F)$.

On calcule donc les composantes du vecteur x^k grâce à la formule suivante :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} A_{i,j}x_j^k\right),\ 1 \leq i \leq n.$$

2.2. **Méthode de Gauss-Seidel.** On choisit comme matrice M la matrice triangulaire inférieure $M = D - E$ et donc la matrice $N = F$. La matrice d'itération vaut $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$.

On calcule donc les composantes du vecteur x^k grâce à la formule suivante :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k\right),\ 1 \leq i \leq n.$$

2.3. **Méthode de relaxation.** On choisit comme matrice M la matrice triangulaire inférieure $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et donc la matrice $N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + F$. La matrice d'itération vaut $\mathcal{L}_\omega = (D-\omega E)^{-1}((1-\omega)D + \omega F)$.

On calcule donc les composantes du vecteur x^k grâce à la formule suivante :

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \frac{\omega}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)A_{i,i}x_i^k\right) \\ &= x_i^k + \frac{\omega}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j\geq i} A_{i,j}x_j^k\right),\ 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Théorème 2. *Si la méthode de relaxation converge avec une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et un paramètre $\omega \in \mathbb{C}$, alors $|\omega - 1| < 1$.*

Exercice 2 : Démonstration du théorème

Calculer $\det(\mathcal{L}_\omega)$ et conclure.□

3. Quelques résultats particuliers de convergence

3.1. **Matrices à diagonale strictement dominante.**

Définition 2. *Une matrice est* `à diagonale strictement dominante` *si*

$$|A_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |A_{i,j}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Théorème 3. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est à diagonale strictement dominante, alors*
(i) A est une matrice inversible,
(ii) la méthode de Jacobi converge,
(iii) la méthode de relaxation avec $0 < \omega \leq 1$ converge.

Exercice 3 : Démonstration du théorème

3.1. Montrer (i) par l'absurde (ou en utilisant le théorème des disques de Gerschgörin).

3.2. Pour montrer (ii), calculer les coefficients de la matrice J de la méthode de Jacobi et montrer que $|||J|||_\infty < 1$.

3.3. Montrer que si λ est une valeur propre de $\mathcal{L}_\omega$, $\lambda + \omega - 1$ est une valeur propre de $\omega D^{-1}(F + \lambda E)$.

3.4. On suppose alors que $|\lambda| \geq 1$. Majorer $|\lambda + \omega - 1|$ grâce au théorème de Gerschgörin, puis majorer $|\lambda|$. En déduire le (iii).□

3.2. **Matrices symétriques définies positives.**

Théorème 4. *Soit $A = M - N$ et $M^* + N$ symétriques définies positives, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Exercice 4 : Démonstration du théorème

On définit la norme vectorielle $||x||_A^2 = x^*Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

4.1. Montrer que $M^{-1}Nx = x - y$, avec $y = M^{-1}Ax$.

4.2. En déduire que $||M^{-1}Nx||_A < ||x||_A$ et conclure. □

Théorème 5. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, alors la méthode de relaxation avec $|\omega - 1| < 1$ converge.*

Exercice 5 : Démonstration du théorème

Utiliser le théorème précédent et conclure.$\square$

4. Exercices supplémentaires

Exercice 6 : La matrice de la méthode des différences finies

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de taille n qui discrétise l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur $[-1, 1]$ avec les conditions aux bords $u(-1) = u(1) = 0$.

6.1. En cherchant le k-ème vecteur propre u^k avec les coefficients $u_i^k = \sin\left(\dfrac{ki\pi}{n+1}\right)$, calculer les valeurs propres de cette matrice. En déduire son conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$.

6.2. En déduire les rayons spectraux des matrices des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, en utilisant la relation $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$ valable pour les matrices tridiagonales.

6.3. Donner alors un développement limité en fonction de n :

- du rayon spectral de la matrice de la méthode de Jacobi J ;
- du rayon spectral de la matrice de la méthode de Gauss-Seidel $\mathcal{L}_1$;
- du rayon spectral de la matrice de la méthode de relaxation $\mathcal{L}_{\omega^*}$ avec $\omega^* = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$,

  en utilisant le fait que pour ce paramètre $\rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \omega^* - 1$.

6.4. Déterminer alors un équivalent du nombre d'itérations nécessaires pour chacune des trois méthodes de la question 6.3.

Exercice 7 : Quelques contre-exemples

7.1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice définie positive. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à cette matrice ne converge pas.

7.2. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ converge, mais que la méthode de Gauss-Seidel diverge.

7.3. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel appliquée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ converge, mais que la méthode de Jacobi diverge.

5. Références

Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.

Ciarlet, Miara et Thomas, *Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation*, Masson.

Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tome 2*, Dunod.

Schatzman, *Analyse numérique*, Dunod.

Serre, *Les matrices*, Dunod.