Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2008-2009

Linéarisation d'équations différentielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y' = f(t, y), \tag{1}$$

avec comme condition intiale $y(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$. On suppose que la solution de ce problème existe pour $t \in [t_0, +\infty[$ et est unique et on la note y_{x_0}.

Définition 1. *On dit que la solution y_{x_0} est stable si il existe $\alpha > 0$ tel que,*

(1) *pour tout $x_1 \in \Omega$ tel que $||x_1 - x_0|| \leq \alpha$, la solution y_{x_1} est également définie sur $[t_0, +\infty[$.*

(2) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < \alpha$ tel que pour tout $||x_1 - x_0|| \leq \eta$, on a $||y_{x_1}(t) - y_{x_0}(t)|| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.*

Définition 2. *On dit que la solution y_{x_0} est asymptotiquement stable si elle est stable et si il existe $0 < \eta < \alpha$ tel que pour tout $||x_1 - x_0|| \leq \eta$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} y_{x_1}(t) - y_{x_0}(t) = 0$.*

Exercice 1 : Premiers exemples

1.1. Que peut-on dire sur la stabilité des solutions des équations $y' = y$ et $y' = -y$ avec $t_0 = 0$?

1. Stabilité des solutions stationnaires d'un système linéaire à coefficients constants [C,D]

Théorème 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Les solutions stationnaires du système $x' = Ax$ sont :*

(1) *asymptotiquement stables ssi $Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.*

(2) *stables ssi pour tout $i = 1, \cdots, n$, ou bien $Re(\lambda_i) < 0$ ou bien $Re(\lambda_i) \leq 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Exercice 2 : Démonstration du théorème.

2.1. Traiter le cas $n = 1$.
2.2. Montrer le théorème dans le cas où A est diagonisable.
2.3. Montrer le théorème dans le cas où $A = \lambda I_m + N$ avec $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ nilpotente.
2.4. Démontrer le résultat dans le cas général.

2. Stabilité des solutions stationnaires d'un système non - linéaire [C]

Théorème 2. *Soit le système autonome $y' = f(y)$ avec $f \in \mathcal{C}^1$ tel que $f(0) = 0$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de la différentielle $f'(0)$. Montrer que si $Re(\lambda_i) < 0$ pour tout i, alors la solution 0 est asymptotiquement stable.*

Exercice 3 : Démonstration du théorème.

3.1. Soit $A = f'(0)$. Ecrire l'équation intégrale vérifiée par une solution x en fonction de e^{tA} et de la fonction $g(x) = f(x) - Ax$.

3.2. Soit $\varepsilon > 0$, expliquer pourquoi il existe $\delta > 0$ tel que $||x|| \leq \delta$ implique $||g(x)|| \leq \varepsilon||x||$. Choisir ε et $||x(0)||$ assez petits pour que pour tout $t \geq 0$, $||x(t)|| \leq \delta$. En déduire de la question 3.1. que

$$||x(t)|| \leq Ce^{-t\sigma}||x(0)|| + C\varepsilon \int_0^t e^{(s-t)\sigma}||x(s)||ds,$$

en précisant qui est σ.

3.3. Appliquer alors le lemme de Gronwall à $\Phi(t) = \int_0^t e^{(s-t)\sigma}||x(s)||ds$. En déduire une majoration de $||x(t)||$ en fonction de $||x(0)||$ et $e^{-t\sigma/2}$.

3.4. Conclure.

Exercice 4 : Un contre-exemple

4.1. Trouver un système paramétré par ε tel que 0 soit un centre dans le cas du linéarisé (cas $\varepsilon = 0$), 0 soit asymptotiquement stable si $\varepsilon > 0$ et instable si $\varepsilon < 0$.

3. Classification dans le cas linéaire et autonome en dimension 2 [D]

On considère l'équation $Y' = AY$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$. Le seul point stationnaire est donc $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Calcul et allure des solutions.

Dans chaque cas, on fera un rapide graphique avec l'allure des solutions.

5.1. Traiter le cas où les valeurs propres sont réelles distinctes. On parle alors de *nœud impropre* (si les valeurs propres sont de même signe) ou de *col* (si les valeurs propres sont de signes opposés).

5.2. Traiter le cas où les valeurs propres sont réelles confondues. On parle alors de *nœud propre* (si la matrice est diagonalisable) ou de *nœud exceptionnel* (si la matrice n'est pas diagonalisable).

5.3. Traiter le cas où les valeurs propres sont complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. On parle alors de *foyer* (si $\alpha \neq 0$) ou de *centre* (si $\alpha = 0$).

4. Indications

Exercice 2 :

2.2. et 2.3. Calculer $\exp(tA)$.

2.4. Utiliser la décomposition de Jordan.

Exercice 3 :

3.1. Utiliser la méthode de variation de la constante.

3.2. σ est n'importe quel réel tel que pour toute valeur propre λ de A, on ait $\mathrm{Re}\lambda < \sigma$. Choisir $C\varepsilon/\sigma < 2$ et $||x(0)|| < \delta/2C$.

3.3. On obtient $||x(t)|| \leq Ce^{-t\sigma}||x(0)|| + C||x(0)||e^{C\varepsilon-\sigma}t$, puis $||x(t)|| \leq 2Ce^{-t\sigma/2}||x(0)||$.

Exercice 4 :

4.1. Le chercher un polaire avec comme solution pour le rayon $r(t) = r(0)e^{-\varepsilon t}$.

Exercice 5 :

5.3. La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

5. Références

[C] Chambert-Loir, Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2* , Masson.

[D] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, PUG.