Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2008-2009

Problème des moindres carrés, méthode QR.

1. Décomposition QR d'une matrice

Exercice 1 [S,C p. 93-94, LT p. 284] :

1.1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Grâce à la décomposition de Choleski, montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, unitaire et $R \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs telles que $A = QR$. Montrer que cette décomposition est unique.

1.2. Donner une manière effective de calculer Q et R.

On peut généraliser le résultat précédent ainsi : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avec $m \geq n$. Il existe $Q \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C})$, unitaire (c'est-à-dire telle que $Q^*Q = I_n$) et $R \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure telles que $A = QR$. C'est l'objet de l'exercice suivant.

2. Matrices de Householder

Définition 1. *On appelle matrice de Householder une matrice de la forme* $H(v) = I_m - 2\dfrac{vv^*}{v^*v}$, *où v est un vecteur de $\mathbb{C}^m$, $v \neq 0$. On pose également $H(0) = I_m$.*

Remarque : La matrice de Householder $H(v)$ représente la symétrie par rapport au plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine et perpendiculaire au vecteur v.

Exercice 2 [C p. 90-93, LT p. 278-283] :

2.1. Montrer qu'une matrice de Householder est symétrique et unitaire.

2.2. Soit $a \in \mathbb{C}^m$ tel que $\displaystyle\sum_{i=2}^{m} |a_i| > 0$. Montrer qu'il existe une matrice de Householder telle que les $m-1$ dernières composantes de Ha soient nulles. Montrer que l'on peut également choisir la première composante de Ha positive.

2.3. Que se passe-t-il si $\displaystyle\sum_{i=2}^{m} |a_i| = 0$?

2.4. Utiliser les matrices de Houdeholder pour trouver une autre méthode de calcul de la décomposition QR d'une matrice A.

2.5. Calculer v^*v avec $v = a \pm ||a||_2 e_1$ et déterminer, selon le signe de a_1, lequel des deux vecteurs on choisira de préférence.

3. Problèmes des moindres carrés

On considère le *problème des moindres carrés* : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avec $m \geq n$ et $b \in \mathbb{C}^m$, on cherche $x \in \mathbb{C}^n$ qui minimise $J(x) = ||Ax - b||_2^2$.

Exercice 3 [LT p. 276 et p.298 et p.273-275] :

3.1. Montrer que x est solution du problèmes des moindres carrés ssi $A^*Ax = A^*b$ (cette équation est appelée *équation normale*). Montrer que ce système admet toujours au moins une solution et qu'elle est unique si rang(A)=n.

3.2. Utiliser la décomposition QR de la matrice A pour résoudre ce problème dans le cas où rang(A)=n.

3.3. Ecrire l'approximation de m points par un polynôme de degré $n-1$ (i.e. pour $n = 2$ la régression linéaire) sous la forme d'un problème de moindres carrés.

4. Indications

Exercice 1

1.1. R est la matrice obtenue par la décomposition de Choleski de A^*A et il suffit de vérifier que $Q = AR^{-1}$ est bien unitaire. Pour l'unicité, utiliser qu'une matrice unitaire, triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs ne peut avoir que 1 comme valeur propre.

1.2. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice.

Exercice 2

2.2. Plus précisément, montrer que $H(a \pm ||a||_2 e_1)a = \mp||a||_2 e_1$.

2.3. $H(0)$ convient. Pour avoir la première composante de $H(a)$ positive, distinguer les cas $a_1 \in \mathbb{R}^+$, $a_1 \in \mathbb{R}_*^-$ et $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2.4. Utiliser $n-1$ fois le résultat de la question 2.2.

2.5. $v^*v = 2||a||_2(||a||_2 \pm a_1)$

Exercice 3

3.1. Calculer le gradient de J. Si $\bar{x}$ est solution de l'équation normale, montrer qu'il minimise $E(x) = (A^*A(x-\bar{x}), x-\bar{x})$ et donc qu'il minimise J. Montrer que $A^*b \in \mathrm{Ker}(A^*A)^\perp$.

5. Références

[C] Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.

[LT] Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1.*, Dunod.

[S] Serre, *Les matrices*, Dunod.