

TP Scilab : méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Remarque : Dans toute cette fiche et en règle générale, on n'utilisera jamais le calcul de l'inverse de la matrice A , c'est-à-dire la fonction `inv` de Scilab.

1. PROGRAMMATION DES MÉTHODES CLASSIQUES

1.1. Programmer une fonction qui prend en entrée une matrice A , un vecteur b et un vecteur initial x_0 et calcule la solution du système $Ax = b$ par la méthode de Jacobi.

1.2. Faire la même chose avec la méthode de Gauss-Seidel.

1.3. Faire la même chose avec la méthode de relaxation de paramètre ω en ajoutant en entrée le paramètre ω .

Indication : On pourra utiliser les fonctions `diag` et `tril`.

2. CAS DES MATRICES TRIDIAGONALES

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de taille n et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La

solution exacte du système $Ax = b$ est alors $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.1. Evaluer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision de 10^{-12} avec la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel et la méthode de relaxation avec $\omega = 1.5$. Comparer ces trois méthodes pour différentes valeurs de n , par exemple $3 \leq n \leq 20$.

2.2. Vérifier numériquement la relation $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$ valable pour les matrices tridiagonales.

2.3. Dans le cas où $n = 20$, trouver graphiquement le paramètre ω optimal pour la méthode de relaxation, en représentant le rayon spectral de la matrice obtenue en fonction de ω . Montrer que ce paramètre est égal à $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$. Compléter la question 2.1. avec la méthode de relaxation avec paramètre optimal.

3. RÉFÉRENCES

Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.

Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tome 2*, Dunod.