Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2008-2009

Introduction aux textes : Linéarisation d'équations différentielles

1. Texte 1 : " Quelques modèles de croissance de populations" [R]

Le modèle d'évolution de la population $N(t)$ des vers du bourgeon de l'épinette au temps t est donné par

$$\frac{dN}{dt}(t) = r_B N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K_B}\right) - \frac{BN(t)^2}{A^2 + N(t)^2},$$

où r_B est le taux de naissance, K_B est lié à la densité du feuillage et le dernier terme est le terme de prédation lié à la densité des oiseaux. On peut adimensionnaliser l'équation en

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2} = f(u, r, q), \text{ avec } r, q > 0. \tag{1}$$

1.1. Déterminer le nombre d'états d'équilibre en fonction de r et q.
1.2. Déterminer leur stabilité.

2. Texte 2 : "Systèmes de type Lotka-Volterra" [R]

Une amélioration du système de Lotka-Volterra (pour modéliser un système proie-prédateur) est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P\left(r\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{kR}{P+D}\right), \\ \frac{dR}{dt} &= R\left(s\left(1 - \frac{hR}{P}\right)\right), \end{aligned}$$

où P est la population de proies et R la population de prédateurs, K modélise une évolution bornée des proies en l'absence de prédateurs, $\frac{k}{P+D}$ permet de modéliser une saturation de l'effet des prédateurs sur les proies, $\frac{hR}{P}$ lie l'évolution des prédateurs à la densité des proies.

On peut adimensionnaliser le système en :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(1-u) - \frac{auv}{u+d} = f(u,v), \\ \frac{dv}{dt} &= bv\left(1 - \frac{v}{u}\right) = g(u,v), \end{aligned} \right. \qquad \text{avec } a, b, d > 0.$$

2.1. Trouver les points d'équilibre positifs du système.
2.2. Etudier leur stabilité.

3. Texte 3 : "Etude d'un système mécanique en rotation" [V]

On considère une bille de masse m qui peut se déplacer sur un cerceau de rayon R, lui-même animé d'un mouvement de rotation autour d'un diamètre à vitesse uniforme ω. L'équation adimensionnée pour l'évolution de l'angle est :

$$\psi'' = -\sin\psi + \lambda\sin(2\psi) - \mu\psi', \text{ avec } \lambda, \mu > 0.$$

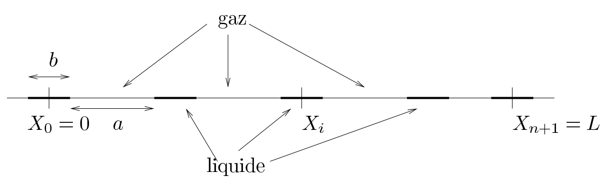
où $\lambda = \frac{\omega^2 R}{2g}$ et $\mu = \frac{\nu}{m}\sqrt{\frac{R}{g}}$, avec ν le coefficient d'intensité des frottements de la bille sur le cerceau.

3.1. Réécrire le système sous la forme d'un système d'ordre un.

3.2. Calculer les états d'équilibre en fonction de λ.
3.3. Déterminer leur stabilité.

4. Texte 4 : " Mélange liquide - gaz " [T]

On suppose que le liquide est incompressible et que le gaz, compressible, se trouve dans le liquide sous forme de n bulles (n est constant). On considère un modèle mono-dimensionnel, le liquide est compris entre 0 et L. A l'équilibre, les segments fluides sont centrés en $X_i = ih$, $0 \leq i \leq n+1$, où $h = a+b$ (a est la taille des bulles à l'équilibre et b la taille des segments liquides à l'équilibre). On note $x_i = X_i + u_i$ la position du centre du i-ème segment S_i de liquide.



On note $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\mathbf{v}$ le vecteur vitesse et $\mathbf{F}$ le vecteur des forces, avec

$$F_i = k\beta h \left(\frac{1}{a + u_i - u_{i-1}} - \frac{1}{a + u_{i+1} - u_i} \right),$$

où k est la constante de la loi des gaz parfaits, β le nombre de molécules de gaz par unité de longueur ; on note ρ la masse linéique du liquide. Le système s'écrit donc

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \rho b \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{u}). \end{aligned} \right. \quad \text{avec } a, b, \beta, h, k, \rho > 0.$$

4.1. Etudier la stabilité des états d'équilibre du système.
4.2. Etudier la stabilité des états d'équilibre du système modifié par l'ajout d'un terme de dissipation :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \rho b \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \kappa \mathbf{v}. \end{aligned} \right. \quad \text{avec } \kappa > 0.$$

5. Références

[R] Ruget, *Mathématiques en situation : issues de l'épreuve de modélisation de l'agrégation*, Springer.
[T] Exemples de textes proposés à l'épreuve de modélisation dans les sessions passées,
`http ://agreg.org/textes.html`
[V] Vial, textes pour l'oral de modélisation,
`http ://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/gregory.vial/enseignement.php`.