Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2008-2009

# TP Scilab : Méthodes de calcul des valeurs propres

## 1. Quelques rappels théoriques

1.1. **La méthode de la puissance.** Soit une matrice $A$ carrée d'ordre n **dont la valeur propre de plus grand module $\lambda_1$ est unique.** On note ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On choisit un vecteur initial $q_0$ qui n'est pas orthogonal au sous-espace propre à gauche associé à $\lambda_1$ et tel que $||q_0|| = 1$. On définit la suite $x_k = Aq_{k-1}$, puis $q_k = \dfrac{x_k}{||x_k||}$.

**Théorème 1.** *On a les limites suivantes :*
- $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\dfrac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|}\right)^k q_k$ *est un vecteur propre à droite de norme unité associé à* $\lambda_1$*,*
- $\lim\limits_{k\to+\infty} ||Aq_k|| = |\lambda_1|$*,*
- $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{x_{k+1}(j)}{q_k(j)} = \lambda_1$ *pour* $1 \leq j \leq n$*, si* $q_k(j) \neq 0$*, où* $y(j)$ *est la* $j$*-ème composante de* $y$*.*

*Si, de plus,* $A$ *est diagonalisable, le facteur de convergence de chacune de ces suites est* $\left|\dfrac{\lambda_{p+1}}{\lambda_1}\right|$*, où* $p$ *est la multiplicité de la valeur propre* $\lambda_1$*.*

1.2. **La méthode de Jacobi.** On part d'une matrice $A$ symétrique. On construit cette fois ci une suite de matrices $(A_k)$ avec $A_0 = A$. On passe de $A_k$ à $A_{k+1}$ par une transformation telle que $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$ où $Q_k$ est une matrice orthogonale et on s'arrange pour annuler deux éléments symétriques hors diagonaux $(A_k)_{p,q}$ et $(A_k)_{q,p}$.

**Théorème 2.** *Soient* $p$, $q$ *deux entiers distincts et* $\theta$ *un réel auxquels on associe la matrice orthogonale*

$$O = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & (0) & \\ & & \cos\theta & & & \sin\theta & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & -\sin\theta & & & \cos\theta & & \\ & (0) & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

*(i) Si* $A$ *est symétrique, la matrice* $B = O^T AO$ *est symétrique et vérifie* $\sum\limits_{i,j} B_{i,j}^2 = \sum\limits_{i,j} A_{i,j}^2$.

*(ii) Si* $A_{p,q} \neq 0$*, il existe une unique valeur de* $\theta \in ]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ *telle que* $B_{p,q} = 0$*. C'est la solution de l'équation* $cotg 2\theta = \dfrac{A_{q,q} - A_{p,p}}{2A_{p,q}}$*. On a alors que* $\sum\limits_{i=1}^n B_{i,i}^2 = \sum\limits_{i=1}^n A_{i,i}^2 + 2A_{p,q}^2$*.*

**Remarque 1 :** Il y a plusieurs manières de choisir le couple $(p, q)$. La plus classique est de prendre $|(A_k)_{p,q}| = \max\limits_{i\neq j} |(A_k)_{i,j}|$.

**Théorème 3.** *La suite* $(A_k)$ *converge et* $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = diag(\lambda_{\sigma(i)})$ *pour une permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$*, où les* $\lambda_i$*,* $1 \leq i \leq n$*, sont les valeurs propres de la matrice* $A$*.*

*On suppose de plus que toutes les valeurs propres de la matrice* $A$ *sont distinctes. Alors la suite* $\Omega_k = O_1 \ldots O_k$ *converge vers une matrice orthogonale dont les vecteurs colonnes constituent un ensemble orthonormal de vecteurs propres de la matrice* $A$*.*

1.3. **La méthode QR.** On décrit ici seulement le principe de la méthode QR. On effectue la décomposition QR de la matrice $A$ de départ et on note $A = Q_1 R_1$, on calcule ensuite le produit $A_2 = R_1 Q_1$. Une fois $A_2 \dots A_k$ calculées, on effectue la décompostion QR de la matrice $A_k$ que l'on note $A_k = Q_k R_k$ et on calcule le produit $A_{k+1} = R_k Q_k$.

La matrice $A_k$ ainsi construite vérifie donc l'égalité $A_k = Q_k^{-1} \dots Q_2^{-1} A Q_2 \dots Q_k$ et a donc les mêmes valeurs propres que la matrice $A$ de départ.

Voici le théorème de convergence :

**Théorème 4.** *On suppose que $A$ est inversible et que ses valeurs propres sont toutes de modules différents. Il existe donc une matrice inversible $P$ telle que $A = P\Lambda P^{-1}$ où $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ et l'on suppose que la matrice $P$ admet une factorisation LU. Alors la suite de matrice $(A_k)$ est telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i,\ 1 \le i \le n,\ \text{ et } \lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,j} = 0,\ 1 \le j < i \le n.$$

**Remarque 2 :** On peut améliorer la convergence en transformant la matrice de départ en une "matrice de Hessenberg supérieure" semblable (i.e. une matrice triangulaire supérieure avec la sous-diagonale en plus) grâce aux matrices de Householder (cf TD sur la décomposition QR). La décomposition QR conserve alors la structure "Hessenberg supérieure" de la matrice.

## 2. Programmation numérique

**Exercice 1 : Comparaison des différentes méthodes.**

On rappelle que les valeurs propres exactes de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & c & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}$ valent $\mu_k = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \le k \le n$ et qu'un vecteur propre associé à $\mu_k$ est $x_k = \left(\left(\frac{c}{b}\right)^{(1/2)} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \dots, \left(\frac{c}{b}\right)^{(j/2)} \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right), \dots, \left(\frac{c}{b}\right)^{(n/2)} \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right)^t$.

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} A_{i,i} = 2, & 1 \le i \le 10, \\ A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1, & 1 \le i \le 9, \\ A_{i,j} = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.1. Programmer la méthode de la puissance. Tracer l'évolution de la valeur propre calculée en fonction du nombre d'itérations. Quelle est l'erreur entre le vecteur propre approché et le vecteur propre exact ? Idem pour la valeur propre $\mu_1$.

1.2. Programmer la méthode de Jacobi et l'appliquer à la même matrice. Illustrer la convergence de la suite de matrices obtenue.

1.3. Programmer la méthode QR et l'appliquer à la même matrice. Illustrer la convergence de la suite de matrices obtenue.

1.4. Comparer les différentes méthodes entre elles, notamment en calculant le nombre d'itérations nécessaires.

**Exercice 2 : Approfondissement sur la méthode de la puissance.**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,5172 & 0,5473 & -1,224 & 0,8012 \\ 0,5473 & 1,388 & 1,353 & -1,112 \\ -1,224 & 1,353 & 0,03642 & 2,893 \\ 0,8012 & -1,112 & 2,893 & 0,05827 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ et $\lambda_4 = 1$ et des vecteurs propres correspondant à $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont respectivement $u_1 = \begin{pmatrix} 0.3225 \\ -0.3225 \\ 0.6451 \\ -0.6129 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -0.1290 \\ 0.1290 \\ 0.7419 \\ 0.6451 \end{pmatrix}$.

2.1. Programmer la méthode de la puissance avec comme vecteur initial $x_0 = (1, 0, 0, 0)^t$. Etudier l'evolution de la valeur propre calculée. Tracer l'évolution de $\gamma_k = ||x_k||_2$ en fonction de $k$.

2.2. On part maintenant du vecteur initial $x_0 = (1, 1, 1, 1)^t$ (presque orthogonal à $u_1$). Même question.

2.3. On part enfin du vecteur initial $x_0 = (1, 1, 0, 0)^t$ (orthogonal à $u_1$ et $u_2$). Même question.

**Exercice 3 : Approfondissement sur la méthode de la puissance inverse.**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1,349 & 0,5649 & -0,4573 & 0,5964 \\ 0,5649 & 2,863 & -0,5147 & 0,6596 \\ -0,4573 & -0,5147 & 3,552 & 0,5707 \\ 0,5964 & 0,6596 & 0,5707 & 3,186 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3,95$, $\lambda_3 = 2$ et $\lambda_4 = 1$ et des vecteurs propres correspondant à $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont $u_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1 \\ 1/12 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.1. Quel est le taux de convergence de la méthode de la puissance pour calculer $\lambda_1$ ? Vérifier la lenteur de la convergence en partant de $x_0 = (1, 0, 0, 0)^t$. Afficher de temps en temps le vecteur propre calculé.

3.2. On cherche à calculer le vecteur propre associé à $\lambda_2$. Calculer le taux de convergence de la méthode de la puissance inverse et en programmer quelques itérations pour les valeurs suivantes de $\mu$ : $\mu = 3,96$, $\mu = 3,97$, $\mu = 3,976$. Que dire de la convergence du vecteur propre approché ?

## 3. Références


Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.

Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2* , Dunod.

Serre, *Les matrices*, Dunod