UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
PRÉPARATION AGRÉGATION - ANALYSE

Transformation de Fourier.

Ex. 1 :
1) Calculs de transformées de Fourier.
a) Calculer les transformées de Fourier des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes :

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases} \qquad f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases} \qquad f \equiv 1_{[-1,0[} - 1_{]0,-1]}.$$

b) Même question avec $f_t(x) \equiv \dfrac{t}{2} \exp(-t|x|)$, puis avec $g_t(x) \equiv \dfrac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$, lorsque $t > 0$. Pour la seconde, on pourra utiliser un résidu.

2) *a)* Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ pour $j = 1, \dots, d$. Montrer $\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)$.

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que, pour un $j \in \{1, ..., d\}$, $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Démontrer alors que $\mathcal{F}(f)$ a une dérivée partielle selon ξ_j et $\partial_j \mathcal{F}(f) = -i\mathcal{F}(x_j f)$. Donner alors une condition suffisante pour que $\mathcal{F}(f)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

3) Lemme de Riemann-Lebesgue.
a) Soit $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Justifier, en utilisant **2)** que $\mathcal{F}(f)(\xi) \to 0$ quand $\xi \to 0$.

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Pourquoi existe-t-il $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon/2$? Justifier alors que $\mathcal{F}(f)(\xi) \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$.

4) Transformation de Fourier des Gaussiennes.
a) Soit, pour $\sigma > 0$, $G_\sigma(x) \equiv \exp\big(-x^2/(2\sigma^2)\big)$, $x \in \mathbb{R}$ (de sorte que $\int_{\mathbb{R}} G_\sigma = \sqrt{2\pi\sigma^2}$). Ecrire une équation différentielle sur G_σ. Déduire alors de **2)** une équation différentielle sur $\mathcal{F}(G_\sigma)$, et déterminer $\mathcal{F}(G_\sigma)$. Calculer aussi $\mathcal{F}(xG_\sigma)$.

b) Généraliser à une Gaussienne non centrée $G_{\sigma,\mu}(x) \equiv \exp\big(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\big)$ à l'aide d'un changement de variable.

c) Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, déterminer la transformée de Fourier de $G_A(x) \equiv \exp\big(-\langle Ax, x\rangle/2\big)$ en fonction de $G_{A^{-1}}$. On pourra orthonormaliser A.

6) Transformation de Fourier et convolution. Si f, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on rappelle que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Etablir que $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.

Ex. 2 : Formule d'inversion. On souhaite montrer la formule d'inversion : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 à l'infini, et

$$f(x) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi.$$

1) Vérifier que l'on ne *peut pas* appliquer le théorème de Fubini. Vérifier aussi cette formule directement sur les exemples de l'Ex. 1 **1)** *b)* et des Gaussiennes. Pour les exemples de l'Ex. 1 **1)** *a)*, vérifier que $\hat{f}$ est une fonction continue et de limite 0 en $\pm\infty$; la fonction $\hat{f}$ est-elle intégrable ? Peut-on le prévoir ?

2) Première preuve. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \, d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\big(-\varepsilon^2|\xi|^2/2\big) \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \, d\xi.$$

Exprimer le membre de droite en fonction d'une intégrale dépendant que de f et ε. Justifier alors la formule d'inversion.

3) Seconde preuve. *a)* On suppose $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, avec f', $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, et $f(a) = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer la formule d'inversion pour $x = a$, *i.e.* que $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ia\xi} d\xi = 0$. Vérifier que, pour une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a $f(x) = (x-a)g(x-a)$. En déduire que $\hat{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $\hat{f}$ en fonction de $\hat{g}$. Conclure alors dans ce cas.

b) On suppose $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, avec f', $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $a \in \mathbb{R}$. On écrit

$$f(x) = \Big(f(x) - f(a) G(x-a) \Big) + f(a) G(x-a),$$

où G est une gaussienne, par exemple. Montrer alors la formule d'inversion dans ce cas.

c) On se place dans le cas général : $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}_c^\infty$) telle que $\rho \geq 0$ et $\int \rho = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$. On rappelle que $f_\varepsilon \equiv f * \rho_\varepsilon \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}(\rho_\varepsilon)$ en fonction de $\hat{\rho}$, et en déduire que $\hat{f}_\varepsilon \to \hat{f}$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Conclure.

4) Troisième preuve. Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à support compact dans $[-T_0, T_0]$ et $T > T_0$, on considère sa $2T$-périodisée f_T, et ses coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x) e^{-in\pi x/T} \, dx.$$

Calculer c_n en fonction de $\hat{f}$, et établir, pour $|x| \leq T_0 < T$,

$$f(x) = \frac{1}{2T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n\pi/T) e^{in\pi x/T}.$$

Quel est le lien *formel* entre cette formule et la formule d'inversion ? Reprendre les arguments du Td sur l'aspect Hilbertien pour les séries de Fourier pour justifier le passage à la limite $T \to +\infty$.

5) Soit $G_{\sigma,\mu}$, $G_{\sigma',\mu'}$ deux gaussiennes (*cf.* Ex 1 **4)**). Déterminer $G_{\sigma,\mu} * G_{\sigma',\mu'}$.

6) On définit $g_1 \equiv \mathbf{1}_{[-1,1]}$.
a) Montrer que l'on peut définir par récurrence une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les conditions : pour $n \geq 2$, $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, avec $g_n'(x) = \frac{1}{2}\Big(g_{n-1}(x+1) - g_{n-1}(x-1) \Big)$ (là où g_n' est continue).

b) Calculer $\hat{g}_n$ pour $n \geq 2$. En déduire un moyen de calculer par récurrence les valeurs des intégrales

$$\mathcal{I}_n \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n(\xi)}{\xi^n} \, d\xi \qquad n \geq 2.$$

Calculer explicitement $\mathcal{I}_n$ pour $n = 2$, 3, 4. Exprimer finalement $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi$ en fonction de $\mathcal{I}_2$.

Ex. 3 : L'image de la transformée de Fourier. On considère $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ (fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ de limite nulle à l'infini. Justifier que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injectif (en utilisant l'Ex. 2). En supposant que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est surjectif, montrer l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on ait

$$\|f\|_{L^1} \leq C \|\hat{f}\|_{\mathcal{C}_0}.$$

Par analogie avec les séries de Fourier, on aimerait prendre $f = \dfrac{\sin x}{x}$, qui n'est pas L^1, mais dont la transformée de Fourier devrait être $\pi \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$, d'après la formule d'inversion. Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$, où ρ est, par exemple, une gaussienne, et

$$f_\varepsilon \equiv \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]} * \rho_\varepsilon).$$

a) Expliciter f_ε en fonction de $\hat{\rho}$.

b) Vérifier que $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$, mais que $\|f_\varepsilon\|_{L^1} \to +\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

c) Calculer $\hat{f}_\varepsilon$ en fonction d'une convolution, et justifier que $\|\hat{f}_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0}$ reste borné quand $\varepsilon \to 0$. Conclure.

d) Justifier toutefois que l'image $\mathcal{F}(L^1) \subset \mathcal{C}_0$ est dense. On peut utiliser pour cela la formule d'inversion.

Ex. 4 : Fourier-Plancherel.
1) Montrer que si u, $v \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} v \; d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{v} u \; dx.$$

En déduire que pour $\varepsilon > 0$, on a, pour tout $w \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{w}(\xi) \exp(-\varepsilon^2 |\xi|^2/2) \; d\xi = \big(\frac{2\pi}{\varepsilon^2}\big)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} w(x) \exp\big(-|x|^2/(2\varepsilon^2)\big) \; dx.$$

2) On rappelle que si f, $g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \qquad \|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

En remarquant que si F, $G \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors $F * G \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, justifier qu'en fait $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

3) Soit $u \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, et $v(x) \equiv \bar{u}(-x)$. Dans quels espaces est $w \equiv u * v$? Calculer $\hat{w}$ en fonction de $\hat{u}$, ainsi que la limite quand $\varepsilon \to 0$ de $\big(\frac{2\pi}{\varepsilon^2}\big)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} w(x) \exp\big(-|x|^2/(2\varepsilon^2)\big) \; dx$ en fonction de u. En utilisant la relation de **1)**, en déduire que $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|\hat{u}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^d \|u\|_{L^2}^2.$$

4) *a)* Justifier alors que l'application $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ admet un prolongement $\mathcal{F_P} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|\mathcal{F_P}(u)\|_{L^2}^2 = (2\pi)^d \|u\|_{L^2}^2$.

b) Etablir que la relation de **1)** $\langle \mathcal{F_P}(u), v \rangle_{L^2} = \langle u, \mathcal{F_P}(v) \rangle_{L^2}$ reste valable si u et v sont dans L^2. Montrer alors que $\mathcal{F_P} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est surjective en montrant que son image est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

c) La formule d'inversion de l'Ex. 2 peut s'écrire, si $f \in L^1$ avec $\hat{f} \in L^1$, $\mathcal{F}(\hat{f}) = (2\pi)^d f(-x)$. Comment peut-on prolonger cette formule d'inversion pour $f \in L^2$? Retrouve-t-on le caractère bijectif de $\mathcal{F_P}$?

d) Etendre la relation $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$ lorsque $f \in L^1$ et $g \in L^2$. Que se passe-t-il si f et g sont dans L^2 ?

e) Déterminer $\mathcal{F_P}(\sin_c(x))$ ainsi que $\mathcal{F_P}(x g_t)$ (*cf.* Ex. 1 **1)** *b)*).

Ex. 5 : Fonctions d'Hermite.
1) Montrer que la relation

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) = (-1)^n H_n(x) \exp(-x^2)$$

définit une fonction H_n qui est un polynôme de degré n dont on calculera le coefficient de plus haut degré.

2) Vérifier que les fonctions $H_n(x) \exp(-x^2/2)$ sont une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$. On note $c_n > 0$ tel que les *fonctions de Hermite* $h_n(x) \equiv c_n H_n(x) \exp(-x^2/2)$ soient une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

3) On suppose $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f, h_n \rangle_{L^2} = 0$.

a) On définit $g(x) \equiv f(x) \exp(-x^2/2)$. Pourquoi a-t-on $g \in L^1(\mathbb{R})$?

b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé. Justifier l'existence d'une suite de polynômes $P_n(x)$ complexes telle que $P_n(x) \to \exp(-i\xi x)$ quand $n \to +\infty$ et $|P_n(x)| \leq \exp(|x| \cdot |\xi|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Justifier alors que $\hat{f}(\xi) = 0$. Que conclure sur la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(\mathbb{R})$?

4) *a)* Avec l'Ex. 2, déterminer un polynôme annulateur simple de $\mathcal{F_P} : L^2 \to L^2$. Quelles peuvent être les valeurs propres de $\mathcal{F_P} : L^2 \to L^2$?

b) A l'aide de l'Ex. 1 **2)**, justifier que chaque fonction de Hermite h_n satisfait $\mathcal{F_P}(h_n) = \lambda_n h_n$, pour un $\lambda_n \in \mathbb{C}$ à déterminer. Que fait la base $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vis-à-vis de $\mathcal{F_P} : L^2 \to L^2$?

Ex. 6 : Noyaux de Dirichlet et Fejèr pour les transformées de Fourier.
1) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, écrire

$$S_A(f)(x) \equiv \int_{-A}^{+A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi$$

comme une convolution $S_A(f) = D_A * f$ de noyau “de Dirichlet“ D_A. Est-ce que D_A est une approximation de l'identité convenable ?

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$t \mapsto \frac{1}{t}\big(f(a+t) + f(a-t) - 2\mu\big) \in L^1(]-1,1[,\mathbb{C})$$

(par exemple, f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Montrer que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \hat{f}(\xi) e^{ia\xi} \, d\xi$$

existe et vaut $2\pi\mu$ (bien que $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ia\xi} \, d\xi$ ne soit pas forcément une intégrale convergente). Démontrer aussi l'analogue du "théorème de convergence normale", qui est dans ce contexte : *si $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et*

$$2\pi f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi.$$

3) On considère les moyennes arithmétiques de S_A : déterminer le noyau “de Fejèr“ K_A tel que

$$\sigma_A(f) \equiv \frac{1}{A} \int_0^A S_\alpha(f) \, d\alpha = K_A * f.$$

Le noyau K_A est-il mieux que D_A ? Pourquoi ? Enoncer et prouver alors un résultat de convergence en moyenne des $S_A(f)$. Etablir alors que si f est continue en x et si $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi$ est une intégrale (généralisée) convergente, alors sa valeur est nécessairement $2\pi f(x)$. Retrouver le caractère injectif de $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$. Démontrer la formule d'inversion en utilisant le noyau “de Fejèr“ K_A.

Références :

• X. Gourdon, **Ex. 1** (p. 34), **Ex. 2** (p. 56), **Ex. 4** (p. 37).
• S. Francinou, H. Gianella, *Exercices d'Analyse pour l'Agrégation (Algèbre 1).* Masson. **Ex. 4** (Ex. 2. 30, p. 74).
• Zuily-Queffellec, **Ex. 3** (p. 160) et **Ex. 5** (Ex. 19 p. 179).