

Interpolation de Lagrange

Soit $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on note pour $k = 0, 1, \dots, n$, p_k l'unique polynôme de degré au plus k tel que $p_k(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, k$.

1. Rappeler pourquoi les polynômes p_k sont bien uniquement déterminés.

{ Soit \mathbb{P}_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k , montrer que le morphisme de \mathbb{P}_k dans \mathbb{R}^{k+1} qui à un polynôme associe ces valeurs aux points x_i , $i = 0, 1, \dots, k$, est un isomorphisme. }

2. Vandermonde: Vérifier que les coefficients de p_n dans la base canonique $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ sont solutions d'un système linéaire inversible.

3. Base de Lagrange: Trouver $n+1$ polynômes de degré n notés l_k tels que $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x)$.

4. Estimation de l'erreur: $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$,

$\pi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, convention $\pi_{-1} = 1$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.

{ Considérer le polynôme $q = p_n + C\pi_n$ qui interpole f aux points x, x_0, \dots, x_n et appliquer n fois le lemme de Rolle à $f - q$. }

(b) En déduire une majoration à la "Taylor-Lagrange" de l'erreur.

Donner un ordre de grandeur de $\sup_{x \in [a, b]} |\pi_n(x)|$.

(c) Que pensez vous de cette méthode pour $f = \sin$ sur $[0, \pi]$ quand le nombre de points d'interpolation tend vers l'infini?

5. Méthode de Newton de calcul de p_n :

(a) Montrer qu'il existe un coefficient noté $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ tel que $p_{k+1} - p_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]\pi_k$.

(b) En déduire l'expression de p_n dans la base de Newton: $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k]\pi_{k-1}(x)$.

(c) Calculer $f[x_k]$ et montrer que $f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$.

{ Soit le polynôme q interpolant f aux points x_1, \dots, x_{k+1} , on a:

$(x_{k+1} - x_0)p_{k+1} = (x - x_0)q - (x - x_{k+1})p_k$. }

(d) En déduire une méthode de calcul des p_k . Comparer à la méthode de Lagrange.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [CM], Crouzeix & Mignot, Analyse numérique des équations différentielles.
- [D], Demailly, Analyse numérique & équations différentielles.
- [S], Schatzmann, Analyse numérique, une approche mathématique.