Conditionnements

Soit $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^N$, $|||.|||$ sa norme subordonnée, $cond(A) := |||A|||\times|||A^{-1}|||$ pour $A \in GL_N(\mathbb{R})$. Pour la norme euclidienne, le conditionnement de A est noté $cond_2(A)$. $\mathrm{Sp}(A)$ est le spectre de A.

1 Conditionnement d'un système linéaire

1. Montrer que $cond(A) \geq 1$, $cond(\alpha A) = cond(A)$ pour tout $\alpha \neq 0$ et $cond(AB) \leq cond(A)cond(B)$.
2. Si $Ax = b$ et $Ay = c$, en notant $\Delta x = y - x$, $\Delta b = c - b$, montrer que : $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.
3. Faire de même, si $Ax = b$ et $By = b$, $\Delta x = y - x$, $\Delta A = B - A$: $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|y\|} \leq cond(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.
4. Si $A = {}^tA > 0$ vérifier que $cond_2(A) = \dfrac{\lambda_N}{\lambda_1}$ où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N \in \mathrm{Sp}(A)$.
5. Montrer que que $cond_2(A) = 1$ si et seulement si A est proportionnelle à une matrice orthogonale.
6. Vérifier que $cond_2(A)$ est invariant par changement de base orthonormale.

2 Stabilité des valeurs propres d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable et P une de ses matrices de passage : $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale.

1. Vérifier que $\det(I + M) = 0$ si $|||M||| \geq 1$ où I désigne la matrice de l'identité.
2. Soit $B = A + \Delta A$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.
   Si $\mu \notin \mathrm{Sp}(A)$, vérifier que $P^{-1}(B - \mu I)P = (D - \mu I)(I + (D - \mu I)^{-1}P^{-1}\Delta AP)$.
3. En déduire que $d(\mathrm{Sp}(A + \Delta A), \mathrm{Sp}(A)) = \max_{\mu\in\mathrm{Sp}(A+\Delta A)} \min_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\mu - \lambda| \leq cond(P)|||\Delta A|||$.
4. En déduire que $d(\mathrm{Sp}(A + \Delta A), \mathrm{Sp}(A)) \leq \Lambda|||\Delta A|||$ avec $\Lambda := \inf_{P,P^{-1}AP=D} cond(P)$,
   puis que la recherche des valeurs propres des matrices normales est un problème très bien posé.

3 Coefficient de Rayleigh

Pour $x \neq 0$, le coefficient de Rayleigh est défini avec le produit scalaire par : $R(x) = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$..

Démontrer pour A une matrice symétrique, avec $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N \in \mathrm{Sp}(A)$. que :

1. $\max\limits_{0\neq x} R(x) = \lambda_N$, $\min\limits_{0\neq x} R(x) = \lambda_1$, $cond_2(A) = \frac{\sup|R|}{\inf|R|}$.
2. $\min\limits_{\dim V=k} \max\limits_{0\neq x\in V} R(x) = \lambda_k$, $\max\limits_{\dim V=k} \min\limits_{0\neq x\in V} R(x) = \lambda_{N-k+1}$, pour $1 \leq k \leq N$.

Références :
Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle ...
Lascaux & Théodor : Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.
Schatzman : Analyse numérique