

Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 15 au 21 septembre 2008

On fixe pour toute la suite un corps commutatif k .

Exercice 1. Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie, soit F un k -espace vectoriel et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrez que $\text{Im } f$ est de dimension finie et que

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E.$$

En déduire que si F est de dimension finie égale à celle de E , l'on a équivalence des trois propriétés suivantes :

- i) f est injective ;*
- ii) f est surjective ;*
- iii) f est bijective.*

Application : soit A une k -algèbre de dimension finie comme k -espace vectoriel. Montrez que si A est intègre, alors A est un corps.

Exercice 2. Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrez l'égalité

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Exercice 3. Soient n un entier et (E_0, \dots, E_{n+1}) une famille de k -espaces vectoriels ; pour tout i compris entre 0 et n on se donne une application linéaire f_i de E_i vers E_{i+1} . On suppose que E_0 et E_{n+1} sont nuls, et que pour tout i compris entre 1 et n le noyau de f_i est égal à l'image de f_{i-1} .

- a) Que signifie cette dernière hypothèse en ce qui concerne f_1 et f_n ?*
- b) Montrez que $\sum_i (-1)^i \dim E_i = 0$.*

Exercice 4. Soient n , m et r trois entiers.

a) Montrez que toute matrice de $M_{n,m}(k)$ de rang r est équivalente à la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers de la diagonale qui sont égaux à 1.

b) Montrez que deux matrices de $M_{n,m}(k)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang, et que le rang des lignes d'une matrice est égal à celui des colonnes (pensez à la transposition !).

c) Montrez que le rang d'une matrice est la dimension maximale d'une sous-matrice carrée inversible que l'on peut en extraire.

Exercice 5. Soit L un corps contenant k et soit M une matrice, que l'on ne suppose pas *a priori* carrée, à coefficients dans k . Montrez que son rang ne change pas lorsqu'on la voit comme matrice à coefficients dans L .

Exercice 6. Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E .

a) Montrez que $(\text{Ker } f^n)_n$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E . Montrez qu'il existe un entier r tel que $\text{Ker } f^r = \text{Ker } f^{r+1}$. Soit r_0 le plus petit entier à posséder cette propriété. Montrez que la suite étudiée est constante à partir du rang r_0 .

b) Montrez que $(\text{Im } f^n)_n$ est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E . Montrez qu'il existe un entier s tel que $\text{Im } f^s = \text{Im } f^{s+1}$. Soit s_0 le plus petit entier à posséder cette propriété. Montrez que la suite étudiée est constante à partir du rang s_0 .

c) Montrez que $r_0 = s_0$ et que E est somme directe de $\text{Im } f^{r_0}$ et $\text{Ker } f^{r_0}$.