Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 7 au 13 octobre 2008

Exercice 1. Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe (*i.e.* un groupe fini dont le cardinal est une puissance de p) non réduit à l'élément neutre. Montrez que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre ; si le cardinal de G est égal à p ou p^2, montrez que G est abélien ; donnez un exemple de groupe de cardinal p^3 non abélien.

Exercice 2. Soit p un nombre premier, soit E un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel non nul de dimension finie et soit G un p-groupe fini opérant sur E par transformations $\mathbb{F}_p$-linéaires

a) Montrez qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $g(x) = x$ pour tout $g \in G$.

b) Montrez qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $g \in G$, la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de E qui correspond à g soit triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

c) Montrez que *a*) reste vrai même si l'on ne suppose plus que E est de dimension finie.

Exercice 3. Soit G un groupe fini, et soit H un sous-groupe de G ; on pose $n = [G : H]$. Montrez qu'il existe un sous-groupe distingué de G contenu dans H et d'indice divisant $n!$. *Indication : on pourra considérer l'action naturelle à gauche de G sur G/H.* En déduire que si n est le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G, alors H est distingué. Lorsque $n = 2$, donnez une preuve directe de ce résultat.

Exercice 4. *Coloriages du cube.*

a) Soit G un groupe opérant sur un ensemble E. Si G et E sont finis, montrez la *formule de Burnside*

$$|G| \times \text{nombre d'orbites} = \sum_{g \in G} |E^g|$$

où E^g désigne pour tout g l'ensemble des points fixes de g.

b) On fixe un entier $k \geq 1$. Un commerçant vend des cubes coloriés à l'aide de k teintes, chaque face étant monochrome. Combien de modèles différents peut-il proposer ?