Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 13 au 20 octobre 2008

**Exercice 1.** Soit $G$ un groupe simple et soit $\varphi$ un morphisme de $G$ dans un groupe $H$. Montrez que $\varphi$ est ou bien injectif, ou bien trivial (*i.e.* $\varphi(g) = e$ pour tout $g \in G$).

**Exercice 2.** Soit $G$ un groupe.

*a*) Soit $D(G)$ le sous-groupe de $G$ engendré par les commutateurs, c'est-à-dire par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x$ et $y$ dans $G$. Montrez que $D(G)$ est distingué et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Soit $\pi$ la flèche quotient de $G$ vers $G/D(G)$. Montrez que pour tout morphisme $f$ de $G$ vers un groupe abélien $H$, il existe un unique morphisme $g$ de $G/D(G)$ vers $H$ tel que $f = g \circ \pi$.

*b*) Calculez $D(\mathfrak{G})$ lorsque $G = \mathfrak{S}_n$ et lorsque $G = \mathsf{GL}_n(k)$ pour un certain corps $k$ ;

*c*) Soit $(D^n(G))_n$ la suite de sous-groupes de $G$ telle que $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$ pour tout $n$. Montrez l'équivalence des deux propositions ci-dessous :

*i*) il existe $n$ tel que $D^n(G) = \{0\}$ ;
*ii*) il existe une suite finie $G = G_0,\ G_1, G_2,\ \dots, G_n = \{e\}$ de sous-groupes de $G$ possédant la propriété suivante : *pour tout $i$ le groupe $G_{i+1}$ est un sous-groupe distingué de $G_i$ et le quotient $G_i/G_{i+1}$ est abélien.*

Un groupe qui satisfait ces deux conditions équivalentes est dit *résoluble.*

*d*) Montrez que tout $p$-groupe est résoluble. *Indication : on pourra utiliser l'exercice 1 de la feuille consacrée aux groupes opérant sur un ensemble.*

**Exercice 3.** On admet que $A_n$ est simple pour tout entier $n$ au moins égal à 5. Soit $n$ un tel entier ; donnez la liste de tous les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.