Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 20 au 26 octobre 2008

Exercice 1. Soit E l'ensemble des trois produits de deux transposition à supports disjoints de $\mathfrak{S}_4$; on rappelle que E est une orbite sous l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur lui-même par automorphismes intérieurs.

a) Déterminez explicitement le stabilisateur de chacun des éléments de E.

b) Même question si l'on restreint l'action à $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 2. Sachant que $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$, donnez la liste des sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ lorsque $n \geq 5$.

Exercice 3. *Construction d'un automorphisme non intérieur de $\mathfrak{S}_6$; on pourra utiliser l'exercice précédent.*

a) On se propose tout d'abord de montrer par deux méthodes différentes qu'il existe un sous-groupe N de $\mathfrak{S}_6$ de cardinal 120 et ne fixant aucun élément de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. À ce propos, pouvez-vous citer un sous-groupe de cardinal 120 de $\mathfrak{S}_6$ qui fixe un élément de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

- **Première méthode.** Déterminez le nombre de 5-sous-groupes de Sylow se $\mathfrak{S}_5$ et conclure.
- **Seconde méthode.** Rappelez comment $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{F}_5) := \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_5)/\mathbb{F}_5^*$ agit naturellement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ et expliquez pourquoi cette action est transitive ; calculez le cardinal de $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ et conclure.

b) Soit G un groupe de $\mathfrak{S}_6$ de cardinal 120 et ne fixant aucun élément de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Montrez que l'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathfrak{S}_6/N$ permet de définir un automorphisme φ de $\mathfrak{S}_6$ tel que $\varphi(N)$ fixe un élément de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; en déduire que φ n'est pas intérieur.

Exercice 4. Soit G un groupe de cardinal 6.

a) Montrez que le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de G est égal à 1 ou 3.

b) Supposons que ce nombre vaut 1. Montrez qu'il existe deux éléments g et h de G d'ordres respectifs 2 et 3 et qui commutent ; en déduire que $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

c) Supposons que ce nombre vaut 3. On fait opérer G par conjugaison sur l'ensemble de ses 2-sous-groupes de Sylow. Montrez que l'action est fidèle et conclure.

Exercice 5. Soit G un groupe de cardinal 21. Combien a-t-il de 7-sous-groupes de Sylow ? En déduire qu'il existe un morphisme φ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathsf{Aut}\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Décrire l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathsf{Aut}\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et donner la liste, à isomorphisme près, de tous les groupes de cardinal 21.

Exercice 6. Soient p et q deux nombres premiers distincts tels que le PGCD de pq et $(p-1)(q-1)$ soit égal à 1. Soit G un groupe de cardinal pq. Combien a-t-il de p-sous-groupes de Sylow ? En déduire qu'il existe un morphisme φ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans $\mathsf{Aut}\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Décrire l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans $\mathsf{Aut}\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et montrez que $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit E un ensemble fini dont on note n le cardinal. On choisit une numérotation $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de E.

a) Montrez que la famille de transpositions $(\tau_{a_i,a_{i+1}})_{i=1,\ldots,n-1}$ engendre S_E.

b) Soit G un sous-groupe de S_E contenant τ_{a_1,a_2} et le n-cycle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; montrez que $G = S_E$.

Exercice 8. Soit E un ensemble dont le cardinal est un nombre premier p.

a) Soit G un sous-groupe de S_E contenant un p-cycle et une transposition ; montrez que $G = S_E$.

b) Soit G un sous-groupe de S_E dont le cardinal est multiple de p et qui contient une transposition ; montrez que $G = S_E$.

Exercice 9. Combien de $\mathbb{F}_2$-droites vectorielles y a-t-il dans $\mathbb{F}_2^2$? En déduire un morphisme $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to S_3$, et montrez qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 10. Soit σ une permutation d'un ensemble E à n éléments, dont la décomposition canonique comprend q_1 cycles de longueur l_1, q_2 cycles de longueur l_2, *etc.* (les n_i étant bien entendu deux à deux distincts) ; déterminez, en fonction des q_i et des l_i, le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans S_E.

Exercice 11. On rappelle le résultat suivant, que vous devez connaître et savoir démontrer : si k est un corps et n un entier, les matrices de transvection (c'est-à-dire celles qui sont de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et λ dans k^*) engendrent le sous-groupe $\mathsf{SL}_n(k)$ de $\mathsf{GL}_n(k)$ défini comme le noyau du déterminant.

a) Soient k un corps fini et q son cardinal, et soit n un entier au moins égal à 2. Pour tout automorphisme (linéaire) u de k^n, on note $\varepsilon(u)$ la signature de la permutation de *l'ensemble* k^n induite par u.

b) Déterminez $\varepsilon(u)$ lorsque u est donnée par une matrice de transvection dans la base canonique.

c) En déduire que si q est impair, ou bien si q est pair et n au moins égal à 3, il existe un homomorphisme de groupes ρ de k^* dans $\{-1, 1\}$ tel que $\varepsilon(u) = \rho(\det u)$ pour tout automorphisme u de k^n.

d) On suppose q pair et n au moins égal à 3 ; montrez que $\varepsilon(u) = 1$ pour tout automorphisme u de k^n.

e) On suppose q impair ; montrez que $\varepsilon(u) = 1$ (resp. $\varepsilon(u) = -1$) si $\det u$ est un carré dans k^* (resp. n'est pas un carré dans k^*).