Théoréme de Borel et Applications

Référence : F. Rouvière "petit guide de Calcul Différentiel"

Théorème 1 [Borel] *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^{(k)}(0) = a_k.$$

Preuve.

- **Etape 1** Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.
- **Etape 2** Chercher u sous la forme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k x) a_k \frac{x^k}{k!}.,$$

  et choisir λ_k de sorte que la série des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$ (quel que soit l'ordre de dérivation !).
- **Etape 3** Conclure.

□

Remarque 1 *Ce théorème est faux si l'on remplace C^∞ par analytique. En effet, si u est analytique, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k,$$

avec $\alpha_k = \frac{u^{(k)}(0)}{k!}$. Si l'on prend $a_k = (k!)^2$ on en déduit que le rayon de convergence de u est nul. Par suite u n'est pas analytique.

Application 1 *Toute fonction f de classe C^∞ sur un intervalle compact $[a, b]$ ayant des demi-dérivées à tout ordre au bord, est prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. On note $a_k^+ = \lim_{x\to a, x>a} f^{(k)}(x)$ et $b_k^- = \lim_{x\to b, x<b} f^{(k)}(x)$. D'après le Théorème de Borel il existe des fonctions f_- et f_+ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{R},\ f_-^{(k)}(a) = a_k \text{ et } f_+^{(k)}(b) = b_k.$$

On définit ensuite $\tilde{f}$ par

$$f(x) = 1_{]-\infty,a[}(x) f_-(x) + 1_{[a,b]} f(x) + 1_{]b,+\infty[}(x) f_+(x).$$

□

Application 2 *Soir $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction paire. Alors, il existe une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = g(x^2)$.*

Preuve.

- **Etape 1** On montre qu'il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $v(x) = f(x) - u(x^2)$ vérifie $v^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, comme f est paire alors $f^{(2k+1)}(0) = 0$ quel que soit k. Grace au théorème de Borel, il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = f^{(2k)}(0)$ pour tout k. On en déduit aisément que la fonction v satisfait les conditions requises.
- **Etape 2** On montre que la fonction $w(t) = v(\sqrt{|t|})$ est de classe C^∞. Pour cela on calcule les dérivées à droite et à gauche de 0 et on vérifie que ces dérivées tendent vers 0 quand t tend vers 0.

□

Application 3 Extension presque analytique *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On note $z = x + iy$ la variable complexe et $\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$. Alors, il existe $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ (appelée extension presque analytique de f) telle que*

$$\tilde{f}_{|\mathbb{R}} = f, \ \ |\partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z)| \leq C_N |Imz|^N, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f(x_0) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z)(z - x_0)^{-1} L(dz), \tag{1}$$

où $L(dz) = dxdy$ est la mesure de Lebsgue sur $\mathbb{C}$.

Preuve. On pose

$$\tilde{f}(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \partial_x^n f(x) \frac{y^n}{n!} \chi(\frac{y}{C_n})$$

où χ est une fonction plateau localisant en 0 et C_n sont des constantes à choisir comme dans le Théorème de Borel, de sorte que la fonction soit régulière.

Par un calcul direct, on montre facilement que $|\partial_{\overline{z}} f(z)| \leq C_N |Imz|^N$.

Pour montrer la formule (1), on note I le membre de droite de (1). On fixe $C > 0$ assez grand et on remarque $I = \lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon$ avec

$$I_\epsilon = \frac{i}{2\pi}\int_{D_\epsilon} \partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z)(z - x_0)^{-1} L(dz)$$

où $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| < C, \ |Imz| > \epsilon$.

D'après la formule de Green, on a

$$I_\epsilon = \frac{i}{2\pi}\int_{\partial D_\epsilon} \tilde{f}(z)(z - x_0)^{-1} dz,$$

c'est à dire

$$I_\epsilon = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(\lambda + i\epsilon)(\lambda + i\epsilon - x_0)^{-1} - \tilde{f}(\lambda - i\epsilon)(\lambda - i\epsilon - x_0)^{-1}) d\lambda.$$

De plus, on a $|\lambda \pm i\epsilon - x_0|^{-1} \leq \epsilon^{-1}$ et $|\tilde{f}(\lambda \pm i\epsilon) - \tilde{f}(\lambda)| \leq C\epsilon$. En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(\lambda)(\lambda + i\epsilon - x_0)^{-1} - \tilde{f}(\lambda)(\lambda - i\epsilon - x_0)^{-1}) d\lambda. \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\lambda) \frac{\epsilon}{(\lambda - x_0)^2 + \epsilon^2} d\lambda = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x_0 + \epsilon\lambda) \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\lambda = f(x_0)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Pour plus de détails, voir le livre “Scattering Theory of Classical and Quantum N-particle systems”, J. Derezinski et C. Gerard, Appendice C, Prop. C.2.1 $\square$