EQUIVALENCE DES NORMES

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur un ev E s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in E,\ C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

On rappelle le

Théorème 1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

La demonstration est un simple argument de compacité aprés avoir décomposé les vecteurs sur une base de E.

Exercice 1 - Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Dans les deux cas suivants comparer les normes N_1 et N_2.

1- $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

2- $N_1(f) = \|f\|_1 + \|f'\|_1$ et $N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_1$.

Exercice 2 - Soit $E = Lip([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications Lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1- Montrer que $N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ est une norme sur E. Est elle équivalente à $\|f\|_\infty$?

2- (E, N) est il complet ? E est il complet pour $\|.\|_\infty$?

Exercice 3 - Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que toute application linéaire de E dans F est continue.

Exercice 4 - Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynomes réels telle que P_n converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ et $P_n(1) = 1$ pour tout n. Montrer que la suite de leurs degrés n'est pas bornée. (Indic : raisonner par l'absurde et considérer la forme linéaire $P \mapsto P(1)$).

Exercice 5 - Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit F un sev de E, de dimension finie. Montrer que $(F, \|.\|)$ est complet.

Exercice 6 - Soit $(X, \|.\|)$ un evn et E, F deux sev, tels que $dim(E) < \infty$ et F est fermé.

1- Montrer que $E + F$ est un sev fermé de X. *indic : on se ramenera au cas $E \cap F = 0$ et on introduira la norme $N(e) = dist(e, F)$.*

2- Montrer qu'il existe une projection linéaire continue P de X sur E telle que $X = E \oplus KerP$. *indic : utiliser le théorème de Hahn-Banach.*

Exercice 7 - Soit E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les fonctions $t \in [0, 2\pi] \mapsto e_k(t) = e^{ikt}$, $k = 0, \ldots, n$. Pour $f = \sum_{k=0}^{n} c_k e_k$ on définit $\|f\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |c_k|$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Montrer que pour tout $f \in E_n$ on a

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq \sqrt{n+1}\|f\|_\infty.$$

Exercice 8 - Sur $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ on considère la norme d'opérateur $\|u\|_\infty = \sup_{\|x\|_2=1} \|u(x)\|_2$ (pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2$ désigne la norme Euclidienen de x) et la norme Hilbert-Schmidt $\|u\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} \|u(e_j)\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

1- Trouver les meilleures constantes $a, b > 0$ telles que l'inégalié ci dessous soit vraie :

$$a\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq b\|u\|_\infty, \quad \forall u \in E.$$

2- Montrer que pour tout $u, v, w \in E$ on a

$$\|uvw\|_2 \leq \|u\|_2\|v\|_\infty\|w\|_\infty.$$