SERIES DE FOURIER : THEOREME DE FEJER ET CONTRE-EXEMPLES

Biblio : Quéffelec-Zuily : *Analyse pour l'agrégation*, Körner, *Fourier Analysis*

Dans toute la feuille, on notera C_{per} l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques. Etant donnée une fonction 2π-périodique et intégrable f on notera $\hat{f}(n)$ les coefficients de Fourier de f, $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ikx}$ et $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(x)$. On rappelle que le noyau de Dirichlet est donné par

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

de sorte que

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)D_N(x-y)dy.$$

Exercice 1 - (Théorème de Féjer)

1- Montrer que $F_N(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\phi_N(x-t)dt$ avec $\phi_N(t) = \frac{\sin^2((N+1)t/2)}{\pi(N+1)\sin^2(t/2)}$.

2- Montrer que ϕ_N est une approximation de l'identité. En déduire que si f est continue en $x \in \mathbb{R}$ alors $F_N(x) \to f(x)$ quand $N \to +\infty$ uniformément en x.

Exercice 2 - (Théorème d'équidistribution de Weyl) Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\langle x\rangle$ la partie fractionaire de x. Soit $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et pour $0 \le a \le b \le 1$, notons

$$N(a,b,n) = \frac{1}{n} card\{k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n, a \le \langle r\gamma\rangle \le b\}.$$

1- Soit f une fonction continue 2π périodique. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(2\pi k\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

2- En utilisant des fonctions f bien choisies, montrer que $\lim_{n\to+\infty} N(a,b,n) = b-a$.

Exercice 3 - (Phénomène de Gibbs) Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi,\pi[$ et $f(\pi) = 0$.

1- Calculer $S_n(f)$.

2- Montrer que$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(\pi - \frac{\pi}{n}) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

3- Donner une approximation numérique de cette intégrale. Comparer cette valeur avec $\sup_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 4 - (Contre-exemple de du Bois-Reymond) Le but de cet exercice est de construire une fonction f continue, 2π-périodique, telle que $\limsup_{N\to\infty} |S_N(f)(0)| = \infty$.

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(s)|ds \geq \frac{4}{\pi^2}\log(n+1).$$

2- Montrer qu'il existe une suite de fonctions g_n de C_{per} telles que $|g_n(s)| \leq 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et

$$|S_n(g_n)(0)| \geq \frac{2}{\pi^2}\log(n+1).$$

Indication. On pourra chercher g_n comme approximation de $s \mapsto sgn(D_n(-s))$.

3- En déduire qu'il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite de polynomes trigonométriques $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall s \in \mathbb{R}, |H_k(s)| \leq 1, \quad |S_{n_k}(H_k)(0)| \geq 2^{2k}.$$

4- On se donne une suite d'entiers $(p_k)_k$. Montrer que la suite de fonctions $(f_m)_m$ définies par $f_m(x) = \sum_{k=1}^m 2^{-k}e^{ip_kx}H_k(x)$ converge normalement. On note f sa limite.

5- On note $H_k(x) = \sum_{l=-q_k}^{q_k} a_l e^{ilx}$ et on choisit q_k de sorte que $q_k \geq q_{k-1}$ et $q_k > n_k$. Montrer qu'avec $p_k = \sum_{j=1}^k (2q_j + 1)$, on a

$$\forall |u| \leq q_k,\ \hat{f}(p_k + u) = 2^{-k}\hat{H}_k(u)$$
$$\forall r < 0,\ \hat{f}(r) = 0$$

6- En déduire que

$$|S_{p_k+n_k}(f)(0) - S_{p_k-n_k}(f)(0)| \geq 2^k.$$

Conclure.