Fonctions holomorphes : Application ouverte, logarithme.

Ex. 1 : l'exponentielle complexe. Lire le prologue du Rudin (p. 1-3) sur la fonction exp.

Ex. 2 : Le théorème de l'application ouverte. On se propose de montrer le résultat :
si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f(\Omega)$ est ouvert ou réduit à un point.

1) *a)* Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Exprimer le jacobien de f vue de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ en fonction de $f'(a)$ en utilisant les équations de Cauchy-Riemann. On suppose que $f'(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe U et V, ouverts de $\mathbb{C}$, tels que $a \in U$, $f(a) \in V$ et $f : U \to V$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Vérifier que df_a préserve l'orientation.

b) En écrivant $V \ni w = f(z)$ pour $z \in U$, vérifier que l'inverse de $f : U \to V$ est holomorphe (prendre U plus petit si besoin).

c) Retrouver le résultat précédent en utilisant les équations de Cauchy-Riemann ou le fait que df_z soit une similitude directe.

2) *a)* Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\pi(z) = z^m$ est ouverte *i.e.* si $\omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert, $\pi(\omega)$ est ouvert. Si $a \in \omega$, on séparera le cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

b) Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que a est un zéro d'ordre fini $m \in \mathbb{N}^*$ de $f - f(a)$. Montrer qu'on peut supposer $a = f(a) = 0$. A l'aide d'un développement en série entière, montrer qu'il existe un voisinage U de 0 et $h : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = z^m h(z)$ dans U, avec $h(0) \neq 0$.

c) Justifier qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de 0 et $g : V \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h(z) = g(z)^m$ dans V. Démontrer que si $F(z) = zg(z)$ dans V, F est holomorphe dans V et $F'(0) \neq 0$. En déduire qu'il existe un voisinage $W \subset V$ de 0 tel que $F : W \to F(W)$ soit bi-holomorphe. Conclure alors que $f(W) = \pi \circ F(W)$ est un ouvert contenant 0.

3) Démontrer le théorème annoncé.

Ex. 3 : Logarithmes complexes.

1) *a)* On définit pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ l'argument de z comme $\mathrm{Arg}(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Vérifier que Arg est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On définit la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ par $\log(z) = \ln(|z|) + i\ \mathrm{Arg}(z)$. Démontrer que log est continue, $\log = \ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\exp(\log(z)) = z$ si $z \notin \mathbb{R}^-$, et $\log(\exp(z)) = z$ si $|\mathrm{Im}(z)| < \pi$. Justifier que $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ en utilisant l'Ex. 2 1).

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifier que la formule $\log_\alpha(z) = \log(e^{i(\pi-\alpha)}z) - i(\pi - \alpha)$ définit une branche du logarithme $\log_\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}^+)$. Pour quel α a-t-on $\log_\alpha = \log$? Justifier que log et $\log_\alpha$ coïncident sur un secteur angulaire.

2) *Application à un calcul d'intégrale.* Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}\, dt.$$

Vérifier l'existence de I. On considère la branche log du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$, et on pose $f(z) = \dfrac{\log(z)}{(1+z^2)\exp(\frac{1}{2}\log(z))}$. Vérifier que f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$, avec un pôle, et on donnera le résidu. Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, on considère le contour orienté Γ_ε^R dans le demi-plan $\{\ \mathrm{Im} \geq 0\}$ constitué des segments $[-R, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, R]$, et des demi-cercles de centre 0 et de rayons ε et R (l'orientation étant naturelle). Appliquer la formule des résidus à f sur le contour Γ_ε^R. Justifier que les intégrales sur les deux arcs de cercle tendent vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$ en majorant le module de la fonction intégrée. En déduire la valeur de I, ainsi que la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$.

3) *Application à un autre calcul d'intégrale : la formule des compléments.*
Calculer, pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \in]0,1[$ (on peut prendre $s \in]0,1[$ si on préfère),

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u}\, du.$$

On utilisera le log défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, la fonction $f(z) = \dfrac{e^{(s-1)\log(z)}}{1+z}$ et pour $0 < \varepsilon < 1 < R$ le contour Γ_ε^R défini comme étant le " Pac-Man " définit comme suit. On pose $\theta_0 = \arcsin(\frac{\varepsilon}{R})$, de sorte que $Re^{i\theta_0} = R\cos(\theta_0) + i\varepsilon$, et on définit Γ_ε^R comme le segment $[i\varepsilon, R\cos(\theta_0) + i\varepsilon]$, puis l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$, puis le segment $[R\cos(\theta_0) - i\varepsilon, -i\varepsilon]$ et un autre arc de cercle $\varepsilon e^{i\theta}$, $-\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ (faire un dessin, bien sûr !). Quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, justifier que les intégrales sur les arcs de cercle tendent vers 0 et donner les limites des intégrales sur les deux segments. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Pour le lien avec la fonction Γ et la formule des compléments, voir par exemple L. Schwartz.

Ex. 4 : Applications conformes.

1) Soit $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linéaire et injective. On dit que A préserve les angles si pour tous u, $v \in \mathbb{C}^*$, l'angle entre $A(u)$ et $A(v)$ est le même qu'entre u et v.

a) Montrer que A préserve les angles ssi l'argument de $\frac{A(z)}{z}$ est indépendant de $z \neq 0$.
b) En notant α, $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $A(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que A préserve les angles ssi $\beta = 0$, *i.e.* A est une similitude directe.

2) On dit qu'une fonction différentiable $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *conforme* si pour tout $z \in \Omega$, $df_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ préserve les angles. Montrer alors que f est conforme si et seulement si f est holomorphe et f' ne s'annule pas.

Références :

- W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod/Masson. *(Ex. 1).*
- H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques.* Hermann. Chap. VI *(Ex. 2).*
- P. Tauvel, *Exercices d'analyse complexe* (Chap. XI, Ex. 13) Dunod. *(Ex. 3, 2)).*
- L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques.* Hermann. p. 347 à 350.