

TD-Développement Lois des grands nombres

L'exercice 2 (ou 1+2) peut faire un développement; 4 aussi, mais est un peu court; 3 et 5 sont des compléments qui peuvent permettre de répondre aux questions du jury...

Exercice 1 : Loi faible des grands nombres L^2

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. On note $m = EX_i$ et $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$. Montrer que $E(|Z_n - m|^2)$ tend vers 0 (ie Z_n tend vers m dans L^2), et que Z_n tend en probabilité vers m , ie pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|Z_n - m| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Montrer que ces résultats restent valables sous les hypothèses plus faibles (Ouvrard p.107) : les X_i ne sont plus i.i.d., mais seulement deux à deux non corrélées. On suppose de plus

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m; \quad \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 2 : Loi faible des grands nombres L^1 (Foata-Fuchs pour cette démonstration; sinon Ouvrard, Feller.)

Soit (X_n) une suite de v.a. centrées deux à deux indépendantes, **de même loi**, admettant un **moment d'ordre 1**. On note $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$.

a. Soit $\varepsilon > 0$, et $g_c(x) = I_{[-c,c]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-c, c]$. Montrer que $\|X_1 - g_c \circ X_1\|_1 \leq \varepsilon$ pour c assez grand.

b. On note $m_c = E(g_c \circ X_1)$, et $f_c = g_c - m_c$. Montrer que $f_c \circ X_1$ est centrée et que $\|X_1 - f_c \circ X_1\|_1 \leq \varepsilon$ pour c assez grand. On choisit un tel c dans la suite.

c. On note $Y_k = f_c \circ X_k$ (on remarquera que le f_c construit au **b.** ne dépend que de la loi de X_1). En utilisant le résultat de l'exercice 1, en déduire que $Z'_n = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$ tend vers 0 dans L^2 , puis dans L^1 .

d. Montrer que $\|Z_n - Z'_n\|_1 \leq \varepsilon$, et en conclure que Z_n tend vers 0 dans L^1 et en probabilité.

Exercice 3 : Loi forte des grands nombres L^4 (Ref. : utilise les Prop 4.3 et 4.4 de Foata-Fuchs p.211).

Soient $X_1, X_2 \dots$ des v.a.i.i.d. centrées admettant un moment d'ordre 4. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On veut montrer que $S_n/n \rightarrow 0$ presque sûrement.

- Calculer $E(S_n^4)$ en fonction des moments d'ordre 2 et 4 des X_i .
- Montrer que

$$P(S_n/n > \varepsilon) \leq \frac{E(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4}.$$

- Utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour conclure.

Exercice 4 : Polynômes de Bernstein, théorème de Weierstrass.

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. telles que $P(X_i = 1) = p$, et $P(X_i = 0) = 1 - p$ (loi de Bernoulli de paramètre p). On note $Y_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$.

- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(|Y_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

- Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On note $f_n(p) = E(f(Y_n))$. Montrez que

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Conclure en établissant la relation

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 5 : Un exemple de suite qui vérifie une loi faible des grands nombres, mais pas une loi forte (Ouvrard p. 112).

Soit (X_n) une suite de v.a. de lois

$$P_{X_n} = \frac{1}{2n \ln n} (\delta_n + \delta_{-n}) + \left(1 - \frac{1}{n \ln n}\right) \delta_0$$

On note

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- En utilisant l'exercice 1, montrer que Y_n tend vers 0 en probabilité.
- Montrer que $P(\limsup(|X_n| \geq n)) = 1$.
- En utilisant $X_n/n = Y_n - (n-1)Y_{n-1}/n$, montrer que Y_n ne tend pas presque sûrement vers 0.