Logarithme d'une matrice inversible : applications

Référence : X. Gourdon, Algèbre

Exercice 1 - Le but de cet exercice est de démontrer que la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

1. Rappeler pourquoi l'exponentielle d'une matrice est toujours inversible.
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. On cherche $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = M$.
   (a) Expliquer pourquoi on peut se ramener au cas où $M = \lambda(I_m + N)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, I_m matrice identité d'ordre m et N nilpotente.
   (b) On suppose momentanement que $M = I_m + N$ (i.e. $\lambda = 1$). On pose
   $$D = N - \frac{N^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{m-1} N^{m-1}$$
   et pour $t \in \mathbb{R}$ on définit $S(t) = \exp D(t)$ où
   $$D(t) = tN - \frac{t^2 N^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{m-1} t^{m-1} N^{m-1}.$$
   Montrer que $(I_m + tN)S''(t) = 0$. En déduire que $\exp(D) = I_m + N$.
   (c) On revient au cas λ quelconque. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(D) = M$.

Exercice 2 -

Montrer que l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(B) = I_n$ est constitué des matrices diaonalisables dont les valeurs propres sont des multiples entiers de $2i\pi$.

Exercice 3 - Soit $p \geq 2$ un entier.

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = A$.
2. Trouver une matrice A non inversible pour laquelle il n'existe pas de matrice B telle que $B^p = A$. *Indic : on pourra prendre pour A une matrice nilpotente d'ordre n.*

Exercice 4 - Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.