PREPARATION A L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES 2008-09
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

THEOREME DU POINT FIXE

Exercice 1 - Soit E un espace vectoriel, d une distance sur E. On suppose que (E,d) est complet.
1- On se donne $f : E \to E$ une application contractante, c.a.d. qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y \in E, \;\; d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y).$$

Montrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$ et que pour tout $x \in E$ la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.
2- On suppose maintenant que $f : E \to E$ vérifie seulement $f^{(p)}$ contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ (où $f^{(p)} = f \circ \ldots \circ f$, p fois). Montrer qu'on a les mêmes conclusions qu'à la question précédente.

Exercice 2 - Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $g : E \to E$ une application contractante. Montrer que l'application définie par $f(x) = x + g(x)$ est un homéomorphisme de E sur E.

Exercice 3 - Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 4 - Soit E un espace de Banach et $f : E \to E$ une application Lipschitzienne.
1- Montrer que pour tout pour $\alpha > 0$ assez petit et pout tout $u_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique fonction $u \in C([-\alpha, \alpha], E)$ telle que

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha], \; u(t) = u_0 + \int_0^s f(u(s))ds.$$

2- Montrer que pour $\alpha > 0$ assez petit, il existe une unique $u \in C^1(]-\alpha, \alpha[)$ telle que

$$\frac{du}{dt} = f(u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

3- Peut on résoudre le problème précédent sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 5 - (Méthode de Newton) Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On suppose que $f'(a) \neq 0$. On définit $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
1- Montrer que pour $r > 0$ assez petit, N_f est bien définie sur $I_a(r) =]a - r, a + r[$ et qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in I_a(r), \; |N_f(x) - a| \leq C|x - a|^2.$$

2- Montrer que pour $r > 0$ assez petit et $x \in I_a(r)$, la suite définie par $x_0 = x$, $x_{n+1} = N_f(x_n)$ est bien définie et converge vers a. Donner une majoration de $|x_n - a|$ en fonction de n et $|x_0 - a|$.

Exercice 6 - Soient $a, b \in \mathbb{R}$, K une application continue sur $[a, b] \times [a, b]$ à valeurs réelles et $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R})$

1- Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x).$$

2- Montrer que pour tout $\lambda > 0$ il existe un unique $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x).$$