PREPARATION A L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES 2008-09

UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

SERIES

Exercice 1 - Déterminer la nature des séries $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ et $\sum \frac{n^n}{4^n(n!)}$.

Indication. Penser à utiliser les critères de Cauchy et/ou de D'Alembert.

Exercice 2 - Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes. Etudier la nature des séries de terme général (u_n) et (v_n). Moralité ?

Exercice 3 - Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

Indication. Penser à comparer avec une intégrale.

Exercice 4 - Soit la suite de terme général $S_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n}$.

1. Donner un équivalent de S_n en $+\infty$.
2. Montrer que la suite de terme général : $D_n = S_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.
3. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} D_n$. Donner un équivalent de $D_n - \ell$.

Exercice 5 - (Regroupement de termes d'indice consécutif) Soient (a_n) une suite à valeurs dans un evn E et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On pose $b_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} a_k$ et $b_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} a_k$ pour $n \geq 1$.

1- Montrer que si la série $\sum a_n$ converge alors la série $\sum b_n$ aussi et que les sommes sont les Ã©gales.

2- La réciproque est-elle vraie en toute généralité ?

3- Montrer que si les a_n sont des réels positifs alors les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

Exercice 6 -

1- Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum 2^n a_{2^n}$ sont de même nature.

Indication. Penser à faire des regroupements judicieux de termes d'indice consécutif.

2- Retrouver à l'aide de ce résultat le critère de convergence des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 - (Transformation d'Abel) Soient (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes. On pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1- Montrer que $\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_q a_q - B_{p-1} a_p$ pour tous $1 \leq p < q$.
2- (Théorème d'Abel) On suppose que :
$i)$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,
$ii)$ la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge,
$iii)$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} |B_n| < +\infty$.
Montrer que la série $\sum a_n b_n$ converge.

3- Cas particulier : vérifier que si (a_n) est une suite réelle qui décroit vers 0, alors $i)$ et $ii)$ sont automatiquement vérifiés.

Exercice 8 - Soit (a_n) une suite réelle qui décroit vers 0 et $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. Montrer que la série $\sum a_n e^{in\theta}$ converge.
Retrouver à l'aide de ce résultat le critère de convergence des séries alternées.

Exercice 9 - Soit $\sum u_n$ une série convergente.

1- Etudier la nature de la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

2- Etudier la nature de la série $\sum e^{\frac{1}{n}} u_n$. On pourra pour cela montrer que $e^{\frac{1}{n}} u_n = u_n + \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{v_n}{n^2}$ avec $v_n = O(u_n)$.