PRÉPARATION A L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES 2008-09
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

ÉTUDE D'UN SYSTEME DIFFÉRENTIEL AUTONOME

Ref : Queffélec-Zuily, Analyse pour l'agrégation

On appelle système différentiel autonome un système d'équations différentielles de la forme

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) \tag{1}$$

où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de classe C^1. En particulier, l'existence d'une unique solution maximale découle du théorème de Cauchy-Lipschitz.

On appelle **point d'équilibre**, toute solution $X_0 \in \mathbb{R}^d$ de $F(X_0) = 0$. Si X_0 et un point d'équilibre, alors la trajectoire constante égale à X_0 est solution du système.

On dit qu'un point d'équilibre X_0 est **stable** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $X(t)$ est une solution de (1) telle que $|X(t_0) - X_0| < \delta$ alors $X(t)$ est définie pour $t \geq t_0$ et

$$|X(t) - X_0| < \epsilon, \; \forall t \geq t_0.$$

On dit qu'un point d'équilibre X_0 est **asymptotiquement stable** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $X(t)$ est une solution de (1) telle que $|X(t_0) - X_0| < \delta$ alors$X(t)$ est définie pour $t \geq t_0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = X_0.$$

Dans le cas où F est linéaire, il est trés facile de classer les point critiques en fonction des valeurs propres de F. Dans le cas non-linéaire, l'étude du linéarisé $D_{X_0}F$ fournit une réponse lorsque les ses valeurs propres ne sont pas imaginaires pures.

Dans la suite on suppose qu'on est en dimension $d = 2$ et on note $F(X) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

Etant donné $m \in [-\infty, +\infty]$ on définit **l'isocline** I_m par

$$I_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \; \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = m\}.$$

Le long de l'isocline I_m, la pente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ est constante.

On dira qu'une trajectoire du système est **monotone** si c'est le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$. Pour montrer qu'une trajectoire est monotone, on utilise souvent le théorème d'inversion locale pour montrer que $t \mapsto x(t)$ est inversible et en déduire que y est une fonction de x.

Exercice 1 - On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x(1 + y) \end{cases} \tag{2}$$

1- Etudier les symétries et les points critiques du système, ainsi que les isoclines I_0 et I_∞.

Dans ce qui suit, on note $A = \{(x, y),\ x \geq 0,\ y < -1\}$, $B = \{(x, y),\ x \geq 0,\ -1 < y \leq 0\}$ et $C = \{(x, y),\ x \geq 0,\ y > 0\}$.

2- Préciser le sens du champ dans chacune des régions précédentes.

3- On considère une trajectoire issue d'un point de A. On note $\mathcal{G} = \{(x(t), y(t)),\ t \geq 0\}$ son graphe.

1. Montrer qu'elle est monotone (c'est à dire que $\exists \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tel que $(x, y) \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$).
2. Montrer que cette trajectoire vérifie $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.
3. On pose $u(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$. Montrer que $u' + \frac{1}{x}u = -1 - \frac{1}{\varphi(x)}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$.
4. Tracer les trajectoires de A.

4- On considère une trajectoire issue de B. Montrer qu'une telle trajectoire va va nécessairement dans C.

5- Montrer qu'une trajectoire issue d'un point de C coupe nécessairement l'axe $x = 0$ en temps fini.

6- En déduire que les trajectoires issues de $\{y > -1\}$ sont fermées. Quelle est la nature du point critique ?