TD Probabilités : Exercices “de base”

Exercice 1 :

a. On considère une famille de 3 enfants; on suppose que la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille. On considère les événements A=”il y a au plus une fille” et ”M=”il y a au moins un enfant de chaque sexe”. Les événements A et M sont-ils indépendants ? Même question pour une famille de 4 enfants (Feller T1, p115).

b. Donner un exemple de 3 événements aléatoires indépendants 2 à 2, mais pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 2 : (Ouvrard)

Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, et Y la v.a. définie pour $p > 0$ par

$$Y = -\frac{1}{p}\ln(X) \ .$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 3 : (Ouvrard)

Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de loi normale, ie de densité f

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \ .$$

Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \ si \ x_2 \neq 0 \ ; \ g(x_1, 0) = 0 \ .$$

On note Y la variable aléatoire $Y = g(X)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Exercice 4: Le principe de réflexion (Feller T1, pp 66-72).

On joue à pile ou face; on note $X_i = 1$ si on obtient pile au ième lancer, et $X_i = -1$ si on obtient face. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, et $S_0 = 0$.

a. Quel est le nombre de chemins $N_{n,x}$ tels que $S_n = x$?

b. Pour $x > 0$, montrer que le nombre de chemins tels que ”$S_1 = 1, \ S_n = x$

et $\exists k \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $S_k = 0$" est égal au nombre de chemins tels que "$S_1 = -1,\ S_n = x$" (principe de réflexion).
c. En déduire, pour $x > 0$, la probabilité

$$P\left(S_k > 0\ \forall k \in \{1, \ldots, n\} | S_n = x\right)\ .$$