TD Exercices de base 2; Borel-Cantelli

<u>Exercice 1 :</u> (Borel-Cantelli)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne suite d'événements. Montrer que

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup_n A_n\right) = 0 \ .$$

2. Si les événements A_n sont indépendants,
$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup_n A_n\right) = 1 \ .$$

<u>Exercice 2</u>:(Une application du lemme 1)
On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$; pour $A \in \mathcal{B}$, on note χ_A la fonction indicatrice de A.

Si (f_n) est une suite bornée dans $L^2((\Omega, \mathbb{R})$, montrer qu'il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}$ tel que : $x \notin \mathcal{N} | \{\backslash(\S)| < \backslash$ à partir d'un certain rang.

Le résultat précédent subsiste-t-il si (f_n) est seulement bornée dans L^1 ? On pourra considérer la suite définie par $f_n = n\chi_{[mh,(m+1)h]}$, où $n = 2^k + m$, avec $0 \leq m < 2^k$ et $h = 2^{-k}$, pour $\Omega = [0, 1]$.

<u>Exercice 3:</u> (Une application du lemme 2)
On cherche à montrer qu'il n'existe pas de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout k $P(A_k) = 1/k$, où $A_k = k\mathbb{N}$. **a.** Montrer que deux événements A_p et A_q sont indépendants si et seulement si p et q sont premiers entre eux.
b. On définit l'événement

$$B = n \in \mathbb{N} \ / \ n \text{ appartient à une infinité de } A_p \ .$$

Montrer que B est vide et de probabilié 1; conclure.

<u>Exercice 4 :</u> (Contre-exemple au lemme 2 de Borel-Cantelli)
Trouver un contre exemple au lemme 2 de Borel-Cantelli, lorsque les evénements ne sont pas inépendants.

<u>Exercice 5 :</u> (Vers la loi du logarithme itéré, Foata-Fuchs p252; une autre application, qui peut illustrer des leçons)
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. indépendantes, identiquement distribuées, de loi $1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
a. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ chu \leq exp(u^2/2)$. (*Indication :* développer en série entière).
b. Montrer que $\forall a > 0$, $\forall u > 0$, $\forall n$, on a

$$P\left(S_n > a\right) \leq \frac{E\left[e^{uS_n}\right]}{e^{ua}} \ .$$

c. En déduire que

$$P(S_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}} \quad \text{et} \quad P(|S_n| > a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}} \ .$$

d. Montrer que quel que soit $c > 1$, presque sûrement il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $|S_n| > c\sqrt{2n \ln n}$.
Remarque : la démonstration de la loi du log itéré est plus technique... cf Foata-Fuchs p.252-254.