TD Calculs d'espérances

Exercice 1 : La ruine du joueur (Feller T1, p313)
On considère un joueur qui à chaque partie gagne ou perd un euro avec probabilités respectivement p et $q = 1 - p$. Son capital initial est z, et i joue contre un adversaire dont le capital initial est $a - z$. Le capital total est donc a. Le joueur joue jusqu'à sa ruine (son capital tombe à 0) ou à celle de son adversaire (le capital du joueur est alors a). On note q_z la probabilité que le jeu s'arrête par la ruine du joueur, et p_z la probabilité que le jeu s'arrête par sa victoire.
a. Montrer que $q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}$ pour $1 \leq z \leq a - 1$.
b. Calculer p_z et p_z.
c. Comment changent p_z et q_z si l'enjeu de chaque partie est doublé (2 euros) ?
d. On considère maintenant la variable aléatoire T_z, durée du jeu. On suppose que T_z a une espérance finie D_z. Calculer D_z.

Exercice 2 : (adapté de l'épreuve agreg. externe analyse 2007)
On note Ω l'ensemble des n-uplets $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, avec $\omega_k \in \{-1, 1\}$ pour tout k. On munit Ω de la probabilité uniforme P. On note X_k la v.a. définie sur Ω par $X_k(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_k$. On fixe λ un réel positif ou nul. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On pose $Z = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.
a. Montrer que pour tout x réel

$$\cosh x \leq e^{x^2/2} \; .$$

Indication : utiliser les séries entières.
b. Calculer $E\left(e^{\lambda Re(Z)}\right)$.
c. Montrer que

$$E\left(e^{\lambda |Re(Z)|}\right) \leq 2 \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{n} (Re\ a_k)^2\right) \; .$$

d. Montrer que

$$E\left(e^{\lambda |Z|}\right) \leq 2 \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right) \; .$$

Exercice 3 : Même genre que le précédent, agreg. externe analyse 2003.

0. Soit λ un réel > 0 et X une v.a. telle que $E\left(e^{\lambda X}\right)$ soit finie. Montrer que
$$P\left(\{X \geq a\}\right) \leq e^{-\lambda a} E\left(e^{\lambda X}\right)$$

1.a. Pour $\lambda \geq 0$ et $x \in [-1,1]$, montrer que
$$e^{\lambda x} \leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda \leq e^{\lambda^2/2} + x \sinh \lambda \ .$$
On pourra utiliser l'inégalité $\cosh \lambda \leq e^{\lambda^2/2}$.

b. Montrer que si la v.a. X est à valeurs dans $[-1,1]$ et est centrée, alors on a pour tout $\lambda \geq 0$:
$$E\left(e^{\lambda X}\right) \leq e^{\lambda^2/2} \text{ et } E\left(e^{-\lambda X}\right) \leq e^{\lambda^2/2} \ .$$

c. En déduire que si la v.a. X est centrée et prend ses valeurs dans $[-1,1]$, alors pour tout $a \geq 0$ on a
$$P\left(\{|X| \geq a\}\right) \leq 2e^{-a^2/2} \ .$$

d. Montrer que si les v.a. indépendantes X_i sont à valeurs dans $[-1,1]$ et sont centrées, alors pour tout $a \geq 0$ et tout $n \geq 1$ on a
$$P\left(\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq a\right\}\right) \leq 2e^{-a^2/2} \ .$$

2. On étudie l'optimalité de l'inéquation précédente.

a. Soient
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ et } \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt \ .$$
Montrer que
$$1 - \phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x} \text{ quand } x \to +\infty \ .$$
On pourra utiliser une intégration par partie.

b. Est-il possible d'obtenir une inégalité, vraie pour toute suite de v.a. indépendantes X_i à valeurs dans $[-1,1]$ et centrées, de la forme
$$P\left(\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq a\right\}\right) \leq Ae^{-\kappa^2/2} \ ,$$
avec des constantes $A > 0$ et $\kappa > 1/2$? Pourquoi ?