# TD-Développement : transformée de Fourier et probabilités

__Théorème :__ Deux mesures bornées sur $\mathbb{R}$ qui ont même transformée de Fourier sont égales.
*La démonstration qui suit est tirée de Ouvrard pp 201-203; elle est faite dans $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^d$ pour simplifier.*

**Lemme 1 :** On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Soient 2 mesures bornées sur $\mathbb{R}$ $\mu_1$ et $\mu_2$. Si

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \ , \ \int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2 \ ,$$

alors $\mu_1 = \mu_2$.
*Démonstration Ouvrard pp 4 et 5.*

**Définition :** Soient $\mu$ une mesure bornée sur $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction borélienne telle que pour tout $x$, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ soit $\mu$-intégrable. On définit la convolution de $f$ et de $\mu$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ (f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\mu(y) \ .$$

**Lemme 2 :** On note pour $\sigma > 0$

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

On a les proprietés suivantes :
i) $g_\sigma$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f * g_\sigma)(x) \to_{\sigma \to 0^+} f(x)$$

iii)

$$\hat{g}_1(t) = \exp(-\frac{t^2}{2}) = (\sqrt{2\pi}) g_1(t) \ .$$

**Lemme 3 :** Soit $\mu$ une mesure bornée sur $\mathbb{R}$; pour tout $\sigma > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\sigma(. - y)$ est $\mu$-intégrable, et

$$(g_\sigma * \mu)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}(v) g_1(\sigma v) \exp(-iyv) dv$$

On admet le lemme 1, et le $i$) du lemme 2.
**1.** Démontrer le $ii$) du lemme 2.
**2.** Démontrer le $iii$) du lemme 2. On pourra calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \cos xu \exp(-x^2/2)dx$$

en dérivant sous l'intégrale.
**3.** Démontrer le lemme 3. On a alors montré que la donnée de $\hat{\mu}$ détermine les produits de convolution $g_\sigma * \mu$. Il reste à montrer que ces produits de convolution déterminent $\mu$.
**4.** Démontrer le théorème, en calculant $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ pour $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, et en utilisant le lemme 1.

**Théorème de Lévy :** Soient $(X_n)$ une suite de v.a. de lois $\mu_n$, et $X$ une v.a. de loi $\mu$. Si $\hat{\mu}_n \to \hat{\mu}$ au sens de la convergence simple, alors $X_n \to X$ en loi.
*La démonstration ci-dessous est décomposée en plusieurs lemmes, en suivant Foata-Fuchs. Ouvrard donne une autre démonstration.*

Dans ce qui suit, on note $g_a$ la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, a)$.
**Lemme 1 :** Soient $(X_n)$ une suite de v.a. et $X$ une v.a. Les deux proprietés suivantes sont équivalentes :
i) Pour toute fonction $f$ lipschitzienne bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$E[f \circ X_n] \to_{n\to\infty} E[f \circ X]$$

ii) $X_n$ tend vers $X$ en loi.
*Démonstration FF pp 218-219.*

**Lemme 2 :** Soit $(\mu_n)$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$, et soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Si $\hat{\mu}_n \to \hat{\mu}$ au sens de la convergence simple, alors $g_\sigma * \mu_n \to g * \mu$ au sens de la convergence simple.

Pour démontrer ce lemme, on se sert du lemme 3 de la démonstration du théorème 1.

**Lemme 3 :** (Lemme de Scheffé) Soient $(X_n)$ une suite de v.a. absolument continues de densités $(f_n)$, et $X$ une v.a. absolument continue de densité $f$. Si $f_n(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, alors $X_n$ tend vers $X$ en loi. *Démonstration FF pp 215-216.*

**1.** Démontrer le lemme 2.
**2.** On se donne $\varepsilon > 0$. Montrer qu'on peut construire une v.a. $Z$ indépendante des $X_n$ et de $X$, de densité $g_\sigma$, telle que $E[|Z|] < \varepsilon$.
**3.** Montrer que $X_n + Z \to X + Z$ en loi (utiliser les lemmes 2 et 3).
**4.** Soit $f$ une fonction lipschitzienne de constante $l$ et bornée. Montrer que

$$\begin{aligned} |E[f \circ X_n] - E[f \circ X]| \leq \; & |E[f \circ X_n] - E[f \circ (X_n + Z)]| + |E[f \circ (X_n + Z)] \ldots \\ & \ldots - E[f \circ (X + Z)]| + |E[f \circ (X + Z)] - E[f \circ X)]| \; . \end{aligned}$$

**5.** Conclure.

<u>**Théorème central limite :**</u> Soit $(X_n)$ une suite de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. La suite de terme général $Y_n$

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_X} \sum_{j=1}^{n} (X_j - EX_j) \; ,$$

où $\sigma_X^2$ est la variance des $X_j$, converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

*Si le théorème de Lévy est admis, la démonstration du TCL est rapide; pour la mettre en développement, il faut ajouter autre chose.*
**1.** Montrer que $\varphi_X(t)$ est deux fois dérivable, et calculer ses deux premières dérivées en $t = 0$. En déduire que $\varphi_X$ admet le développement limité suivant :

$$\varphi_X(t) = 1 + itEX - \frac{t^2}{2} EX^2 + t^2 \varepsilon(t) \; ,$$

avec $\varepsilon(t) \to_{t \to 0} 0$. **2.** Etudier la convergence de $\varphi_{Y_n}(t)$ quand $n$ tend vers l'infini.
**3.** Conclure.