TD mesure et intégration

Exercice 1 :
Étudier la convergence de

$$\int_{[0,1]^d} \frac{dX}{\|X\|^\alpha} \tag{1}$$

suivant les valeurs de la dimension d et de α. On pourra utiliser un changement de variable (et la norme euclidienne), ou le théorème de Fubini (et la norme 1).

Exercice 2 : agrégation externe 2006, sujet d'analyse.
Pour toute partie $A \subset S^{n-1}$, on définit le cône engendré par A comme l'ensemble

$$C(A) = \{t.x | t \geq 0, x \in A\} \ .$$

On considère des variables aléatoires $a_1, \ldots, a_n$ gaussiennes, indépendantes, de moyenne nulle et de variance 1. Leur loi jointe est définie par :

$$\mathbb{P}\left((a_1, \ldots, a_n) \in B\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} d\lambda_n(x) \ , \tag{2}$$

où $\lambda_n(x)$ est la mesure de Lebesgue. Soit r une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la loi de $\frac{a}{\|a\|}$ est invariante par rotation, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{\|a\|} \in A\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a}{\|a\|} \in r^{-1}(A)\right) \tag{3}$$

Exercice 3 : Inégalités de Markov et Tchebycheff
On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

1. Si $f \in L^1((\Omega, \mathbb{R}))$, montrer que

$$\mu\left(\{x \in \Omega \ , \ |f(x)| \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_\Omega |f(x)| d\mu \ . \tag{4}$$

2. Si $f \in L^2((\Omega, \mathbb{R}))$, montrer que

$$\mu\left(\{x \in \Omega \ , \ |f(x)| \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a^2} \int_\Omega |f(x)|^2 d\mu \ . \tag{5}$$

Exercice 4: agrégation externe 2003, analyse.
Soient q et r deux densités sur $[0,1]^n$. L'écart de variation totale entre elles est défini par

$$d_{VT}(q,r) = \sup_{0\leq f\leq 1}\left|\int_{[0,1]^n} f(x)q(x)dx - \int_{[0,1]^n} f(y)r(y)dy\right| \ ,$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions (boréliennes) f à valeurs dans $[0,1]$.
a. Montrer que

$$\int_{[0,1]^n} [q(x)-r(x)]_+ dx = \frac{1}{2}\int_{[0,1]^n} |q(x)-r(x)|dx \ .$$

b. Montrer que $d_{VT}(q,r)$ vérifie

$$d_{VT}(q,r) = \frac{1}{2}\int_{[0,1]^n} |q(x)-r(x)|dx \ .$$

Exercice 5: Lesigne pp.58
On considère une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre p. On note Ω l'ensemble de suites infinies de 0 et de 1. $\Omega = \{\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}\ ,\ \omega_n \in \{0,1\}\}$.

Il n'est pas immédiat de définir une tribu et une mesure de probabilité appropriée sur Ω; cet exercice, nécessaire pour parler par exemple de loi forte des grands nombres, n'est pas très intéressant, et fait en partie dans Lesigne. En voici le début; cet "exercice" a surtout pour but de vous inciter à jeter un œil à cette question ,en vue de la leçon "Pile ou Face".

On note Ω_n l'ensemble des suites de 0 et de 1 de n éléments. On note $S_n(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \dots \omega_n$.

Un sous ensemble A de Ω est appelé "événement de type fini" si il existe $n(A) \in \mathbb{N}$ et $A' \subset \Omega_n$ tels que

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega^{(n)} \in A'\} \ ,$$

où $\omega^{(n)} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. On appelle alors probabilité de A le nombre

$$P(A) = \sum_{\omega^{(n)}\in A'} p^{S_n(\omega)} q^{n-S_n(\omega)} \ .$$

a. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ des événements de type fini est une algèbre unitaire (stable par union finie, différence, et contient Ω)

b. Vérifier que la définition de $P(A)$ ne dépend pas de $n(A)$, que $P(\Omega) = 1$, et que P est additive.