

Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 1 - Topologie.

Exercice 1 (Définitions)

Rappeler comment est défini :

- a) une topologie et une base de la topologie,
- b) une distance, la distance discrète,
- c) la topologie dans un espace métrique,
- d) une norme,
- e) un voisinage,
- f) l'adhérence,
- g) l'intérieur,
- h) la topologie induite,
- i) un homéomorphisme,
- j) un produit fini d'espace métrique,
- k) un espace séparé.

Exercice 2 (Boules ouvertes, fermées, ...)

Soit (E, d) un espace métrique.

On note B_o et B_f les boules ouvertes et fermées.

- 1) Montrer que l'adhérence de $B_o(a, r)$ est inclu dans $B_f(a, r)$.
- 2) Montrer l'égalité dans le cas d'un espace normé.
- 3) Dans le cas d'un espace normé, montrer que la frontière de $B_o(a, r)$ est la sphère $S(a, r)$.

Exercice 3 (Lipschitziennité et distance)

Soit (E, d) un espace métrique.

- 1) Montrer la lipschitziennité de la distance.
- 2) Soit $A \subset E$. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 4 (Topologie de $A + B$)

Soit E un espace vectoriel normé.

- 1) Soit A un ouvert et B quelconque de E , alors $A + B$ est ouvert.
- 2) Donner un exemple où A et B sont fermés et $A + B$ non fermé.

Références : Gourdon, Pommellet, Schwartz