**Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,**
*UE3 - 3* - **Espaces complets.**

Pré-requis : définition d'une suite de Cauchy et d'un espace complet.

**Exercice 1 (Propriétés de base)**

1) Soit $(E, d)$ un espace métrique. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

2) Soit $(E, d)$ un espace métrique. Montrer qu'une suite de Cauchy avec un point d'accumulation $a$ est convergente (vers $a$).

3) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

4) Montrer que tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension fini est complet.

5) Montrer qu'un complet d'un espace métrique est fermé.

6) Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est fermé.

7) Montrer qu'un fermé d'un espace métrique complet est complet.

8) Montrer que si $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$ sont complet, alors $(E_1 \times E_2, d)$ est complet avec $d =$ (au lecteur de compléter, préciser plusieurs distances possibles).

**Exercice 2 (Espace des fonctions continues, de classe $C^1$ et de classe $C^\infty$)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1) Montrer que l'espace $C([a, b])$, des fonctions continues à valeurs réelles et définies sur l'intervalle $[a, b]$, n'est pas complet pour la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

2) Montrer que l'espace $C([a, b])$, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

est complet.

3) Montrer que l'espace $C^1([a, b])$, des fonctions de classe $C^1$ à valeurs réelles et définies sur l'intervalle $[a, b]$, n'est pas complet pour la norme de la convergence uniforme.

4) Montrer que l'espace $C^1([a, b])$, muni de la norme

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

est complet.

5) Montrer que l'application qui à $f, g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ associe

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty},$$

est une distance sur $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ qui rend cet espace complet.

**Exercice 3 (Espaces de suites)**

1) Montrer que l'espace vectoriel $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornées, muni de la norme

$$\|(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|,$$

est complet.

2) Montrer que l'espace vectoriel $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

3) Montrer que l'espace vectoriel $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_k| < +\infty$, muni de la norme

$$\|(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|,$$

est complet.

4) Montrer que $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \subset l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, mais que l'espace $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**Exercice 5 (Applications linéaires continues)**

Montrer que l'espace $L_c(E, F)$, avec $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $F$ un espace de Banach, muni de la norme d'opérateur est complet.

**Exercice 6 (Quelques propriétés des espaces complets)**

1) Soient $(E, d)$ un espace complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides telle que $\operatorname{diam}(F_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Alors il existe $x \in E$ telle que $\cap F_n = \{x\}$.

2) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer que $E$ est complet si et seulement si pour tout $\sum \|u_n\|$ convergente, on a $\sum u_n$ converge.

3) Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ dérivable avec une dérivée bornée, alors $f$ se prolonge continuement sur $[a, b]$.

**Exercice 7 (Notion métrique)**

En étudiant $d(x, y) = |\mathrm{Arctan} x - \mathrm{Arctan} y|$ sur $\mathbb{R}$, montrer que la notion d'espace complet est métrique et non topologique.

Références : Gourdon, Leichtnam-Schauer, Pommellet, Ramis, Schwartz