Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 5 - **Applications linéaires.**

Exercice 1 (Applications linéaires continues)

Munissons l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs réelles de la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$, notée

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Considérons les applications linéaires Φ_1 et Φ_2, définies sur $\mathcal{C}([0,1])$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ par

$$\Phi_1(f) = \int_0^1 f(t)\,dt, \quad \Phi_2(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt.$$

Montrer la continuité des applications linéaires Φ_1 et Φ_2, calculer leur normes et étudier si cette norme est atteint.

Exercice 2 (Calcul de normes)

Considérons les espaces $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ normés par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

1) Soit $S : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$S(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

Montrer que l'application S est continue et calculer sa norme.

2) Soit maintenant $T : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$T(f) = f'$$

Est-ce que l'application T est continue ?

Exercice 3 (Espace l^p)

On note pour $p \geq 1$,

$$l^p(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ réelle } ; \sum_{n\geq 0} |u_n|^p < +\infty\},$$

muni de la norme

$$\|(u_n)\|_p = \left(\sum_{n\geq 0} |u_n|^p\right)^{1/p},$$

et $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles bornées muni de

$$\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Montrer qu'il existe une bijection qui conserve les distances entre $l^\infty(\mathbb{N})$ et $(l^1)'(\mathbb{N})$.

On peut montrer de même que, pour $p > 1$, il existe une bijection qui conserve les distances entre $(l^q)'(\mathbb{N})$ et $l^p(\mathbb{N})$ où $1/p + 1/q = 1$.

Exercice 4 (Séries de Fourier)

Notons E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π périodique muni de la norme infini. Pour $f \in E$, posons, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\, dt.$$

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme linéaire, définie sur E par la formule

$$L_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

1) Montrer que cette forme linéaire est continue et montrer que sa norme vaut

$$\|L_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right| dt.$$

2) En déduire qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier.

Exercice 5 (Commutateur)

Soient E un espace vectoriel normé et f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

1) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f$.

2) Montrer que f et g ne sont pas simultanément continues.

Exercice 6 (Noyau d'une forme linéaire)

Soient E un espace vectoriel normé et F une forme linéaire sur E.
Montrer que F est continue sur E si et seulement si $\mathrm{Ker}F$ est fermé dans E.

Références : Brézis, Gourdon, Pommellet