Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 7 - **Théorème de Brouwer, Schauder et Perron-Frobénius.**

Schéma de la preuve du Théorème de Brouwer :

1) Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^∞. Notons D_k le déterminant des vecteurs $\partial_{x_1} f$, ... $\partial_{x_{k-1}} f$, $\partial_{x_{k+1}} f$, ..., $\partial_{x_{n+1}} f$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \partial_{x_k} D_k = 0$.

2) Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $F : B \to B$ une fonction de classe C^∞. Supposons que pour tout $x \in B$, $F(x) \neq x$.

a) Montrer que $a : B \to \mathbb{R}$ qui à x associe la plus grande racine de $\|x + \alpha(x - F(x)\|^2 = 1$ est de classe C^∞.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in B$, posons $f(t, x) = x + ta(x)(x - F(x))$ et $I(t) = \displaystyle\int_B D_1(t, x)\, dx$. Calculer $I(0)$, $I(1)$. Montrer que I est de classe C^1 et calculer I'. En déduire une contradiction.

3) Montrer le Théorème de Brouwer : Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $F : B \to B$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in B$ tel que $F(x) = x$.

Proposition 0.1 (Convexe compact d'intérieur non vide) *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit C un convexe compact d'intérieur non vide de E, alors C est homéomorphe la boule unité fermée de E.*

Schéma de la preuve Après avoir translaté C de telle façon que le point 0 soit dans l'intérieur de C, on utilise la jauge

$$j(x) = \inf\{\lambda > 0\,;\, \frac{x}{\lambda} \in K\}$$

qui est définie de E dans $\mathbb{R}^+$. On montre que $x \in C$ équivaut $j(x) \leq 1$, que $j(\alpha x) = \alpha j(x)$ pour tout $x \in E$ et $\alpha > 0$ et que $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$. Ensuite, notant $\rho > 0$ un réel tel que $B(0, \rho) \subset C$, on montre que

$$\|j(x) - j(y)\| \leq \frac{2}{\rho}\|x - y\|$$

pour tout $x, y \in E$. Posant alors Ψ la fonction de C dans $\overline{B}(0, 1)$ qui x associe $j(x)\dfrac{x}{\|x\|}$ pour $x \neq 0$ et 0 pour 0, on montre que Ψ est bijective et continue entre deux compacts et on conclut que cet homéomorphisme convient.

Exercice 1 (Théorème de Schauder)

L'extension du Théorème de Brouwer à la dimension infinie nécessite de la compacité. Il s'agit du Théorème de Schauder dont l'énoncé est le suivant :

Soit E un espace vectoriel normé. Soit K un compact, convexe non vide de E et $T : K \to K$ continue telle que $\overline{T(K)}$ est compact. Alors T admet au moins un point fixe dans K.

Démontrons-le.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $u_1, \cdots, u_{N_\varepsilon} \in \overline{T(K)}$ tels que les boules ouvertes de centre u_k et de rayon ε recouvrent $\overline{T(K)}$.

2) Posons $K_\varepsilon = \{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \lambda_k u_k\,;\, 0 \leq \lambda_k \leq 1, \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \lambda_k = 1\}$ et $P_\varepsilon(u) = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \Delta_k^\varepsilon u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \Delta_k^\varepsilon}$, où Δ_k^ε est la distance de u au complémentaire dans K de la boule ouverte de centre u_k et de rayon ε. Montrer que P_ε de $T(K)$ dans K_ε est bien définie et continue, puis que $\|P_\varepsilon(u) - u\| \leq \varepsilon$ pour tout $u \in T(K)$.

3) Montrer que K_ε est homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^{M_\varepsilon}$ pour un certain $M_\varepsilon \leq N_\varepsilon$.

4) Posons $T_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(T(u))$ pour $u \in K_\varepsilon$. Montrer que $T_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ et qu'il existe un point fixe $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ de T_ε.

5) Conclure au Théorème.

Exercice 2 (Théorème des trois fermés)

1) Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E.

2) Soit Δ un triangle de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de 3 points non alignés a, b, c. Supposons que $\Delta = F_a \cup F_b \cup F_c$ réunion de trois fermés avec $[a, b] \subset F_a$, $[b, c] \subset F_b$, $[c, a] \subset F_c$. Alors montrer que $F_a \cap F_b \cap F_c \neq \emptyset$.

Indication : Poser $\varphi(h) = \dfrac{a\, d(h, F_a) + b\, d(h, F_b) + c\, d(h, Fc)}{d(h, F_a) + d(h, F_b) + d(h, Fc)}$ et appliquer le Théorème de Brouwer.

Exercice 3 (Théorème de Perron-Frobénius, forme faible)

On va montrer que :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A associé à un vecteur propre positif.

Pour cela, appliquer le Théorème de Brouwer avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \sum x_i = 1,\, x \geq 0, Ax \geq \rho(A)x\}$ et $f(x) = \dfrac{1}{\|Ax\|_1} Ax$. (On commencera par traiter le cas où il existe $x \in C$ tel que $Ax = 0$.)

Références : Berthelin, Chambert-Loir, Evans, Pommellet, D. Serre