Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 10 - **EDO Non-linéaires.**

Exercice 1 (Fonctions Lipschitziennes)

1) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (|x|, 1 + x)$ est Lipschitzienne (avec par exemple la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$).

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x, y) = ax + by$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la plus petite constante de Lipschitz possible pour f avec les normes 1 et ∞ sur $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que la fonction $f(y) = \cos\sqrt{|y|}$ est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Application des théorèmes d'existence)

Prouver l'existence et l'unicité avec une condition initiale en $t = 0$ (que l'on précisera) des solutions maximales de
1) $y' = \cos y$, 2) $y'y + y'' + y^2 = 0$, 3) $\left\{ \begin{array}{l} x' = y^2, \\ y' = txy, \end{array} \right.$ 4) $y' = |y - t|$, 5) $\left\{ \begin{array}{l} x' = |y - t|, \\ y' = |x - t|, \end{array} \right.$ 6) $y' = y|y - t|$.

Exercice 3 (Hypothèses d'application de Cauchy-Lipschitz)

Donner les indices k et l de régularité minimale des fonctions $a \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $b \in C^l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour chacune des équations différentielles suivantes :
1) $y' = a(t)b(y)$, 2) $y' = a(ty)$, 3) $\left\{ \begin{array}{l} x' = (x - y)a(t), \\ y' = (y^2 - x^2)b(t), \end{array} \right.$, 4) $\left\{ \begin{array}{l} x' = (x - y)a(t)b(y), \\ y' = (y^2 - x^2)a(t)b(x). \end{array} \right.$

Exercice 4 (Cauchy-Lipschitz, solutions maximales)

Etudier les différentes équations différentielles suivantes. On s'intéressera à a) l'existence/unicité de solutions maximales, b) l'expression éventuelle de ces solutions.

1) $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(2) = -1/2$.

2) $y' = 1/y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

3) $y' = 1 + y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 1$.

4) $y' = \sqrt{y}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

5) $y' = |y|$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

Exercice 5 (Lemme de Gronwall)

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in C(I, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \in I$,

$$w'(t) \leq v(t)w(t). \tag{1}$$

Alors montrer que pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$,

$$w(t) \leq w(t_0)e^{\int_{t_0}^t v(s)\,ds}.$$

2) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in C(I, \mathbb{R})$. On suppose que $v \geq 0$ et que pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$,

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)\,ds. \tag{2}$$

Alors pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$,

$$u(t) \leq ae^{\int_{t_0}^t v(s)\,ds}.$$

Exercice 6 (Inégalité de stabilité)

1) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\|u'(t)\| \leq L\|u(t)\| + M$$

avec $L > 0$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Soit y une solution de $y' = f(t, y)$ pour $t \geq 0$ telle que $y(0) = y_0$ et $\tilde{y}$ une solution de $\tilde{y}' = \tilde{f}(t, \tilde{y})$ pour $t \geq 0$ telle que $\tilde{y}(0) = \tilde{y_0}$. On suppose que pour tout $t \geq 0$ et $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^N$,

$$\|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)\| \leq M$$

et

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|.$$

Obtenir l'estimation de la différence entre y et $\tilde{y}$ suivante, pour $t \geq 0$,

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y(0) - \tilde{y}(0)\|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Théorème des bouts

Théorème de sortie de tout compact : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue (dans toutes les variables), localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $y :]c, d[\to \mathbb{K}^N$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de Ω quand $t \to d$. Plus précisément, pour tout compact K inclus dans Ω, il existe un voisinage V de d tel que $(t, y(t)) \notin K$ pour tout $t \in V$.

Dans le cas particulier où $\Omega =]a, b[\times \Omega'$ avec Ω' un ouvert de $\mathbb{K}^N$, si $y :]c, d[\to \mathbb{K}^N$ est une solution maximale de $y' = f(t, y)$ avec $d < b$, alors pour tout compact K' inclus dans Ω', il existe un voisinage V de d tel que $y(t) \notin K'$ pour tout $t \in V$.

Théorème des bouts : Soient $\Omega =]a, b[\times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue (dans toutes les variables), localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $y :]c, d[\to \mathbb{K}^N$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Si $d < b$, alors on a $\|y(t)\| \underset{t \to d}{\to} +\infty$. Ceci veut dire aussi que si $t \mapsto y(t)$ est bornée, alors $d = b$.

Définition 6, Solution globale : Dans le cas où $\Omega = I \times \Omega'$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une solution globale est une solution définie sur I tout entier.

Exercice 7 (Solutions globales)

1) Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue (dans toutes les variables), localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état et bornée. Montrer que toute solution maximale est globale.

2) Montrer que c'est encore vrai si on remplace l'hypothèse f bornée par l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que $\|f(t, x)\| \leq C_1\|x\| + C_2$ pour tout $(t, x) \in]a, b[\times \mathbb{R}^N$.

Équations autonomes

Exercice 8 (Equation autonome)

Une équation autonome est une équation $(\mathcal{A})$ de la forme $y' = f(y)$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ localement lipschitzienne et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $y :]a, b[\to \mathbb{R}^N$ une solution maximale de $(\mathcal{A})$. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $y_c :]a-c, b-c[\to \mathbb{R}^N$ définie par $y_c(t) = y(t+c)$ est une solution maximale de $(\mathcal{A})$.

2) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Supposons que f soit localement lipschitzienne sur Ω. Soit $y :]a, b[\to \mathbb{R}^N$ et $\tilde{y} :]\tilde{a}, \tilde{b}[\to \mathbb{R}^N$ deux solutions maximales de $(\mathcal{A})$ telles qu'il existe $t_0 \in]a, b[$ et $t_1 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ tels que $y(t_0) = \tilde{y}(t_1)$. Montrer que $]a + t_1 - t_0, b + t_1 - t_0[=]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et $\tilde{y}(t) = y(t - t_1 + t_0)$ sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$. En particulier $\{y(t) ; t \in]a, b[\} = \{\tilde{y}(t) ; t \in]\tilde{a}, \tilde{b}[\}$.

3) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ localement lipschitzienne sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}^N$ une solution maximale de $(\mathcal{A})$. Supposons qu'il existe $t_2 > t_1$ tels que $y(t_1) = y(t_2)$, alors montrer que $I = \mathbb{R}$ et que y est périodique.

Exercice 9 (Intervalle d'existence pour $y' = f(y)$ avec $f > 0$)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $f > 0$.

1) Montrer que $G(z) = \displaystyle\int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(u)}\, du$ est une bijection de $[y_0, +\infty[$ sur $[0, \displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du[$.

2) En déduire que la solution maximale y de $y' = f(y)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est définie sur $]T_*, T^*[$ avec $T^* = t_0 + \displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du$.

3) Montrer de même que $T_* = t_0 - \displaystyle\int_{-\infty}^{y_0} \frac{1}{f(u)}\, du$.

4) Application : Déterminer l'intervalle d'existence des solutions maximales de $y' = \sqrt{y^2+1}$, $y' = y^3 + 1$, $y' = (1+y^2)^2$, $y' = 2 + \sin y + \cos y$.

Exercice 10 (Intégrales premières)

Trouver une intégrale première pour les équations différentielles suivantes :

$$a)\, y''(2y' + y) + y'(y' + 2y) = 0, \quad b)\, y'' = 6y^2 - 2y, \quad c) \left\{ \begin{array}{l} x' = -xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{array} \right. .$$

Exercice 11 (Hamiltoniens)

Les systèmes suivants sont-ils Hamiltoniens ? Si oui, préciser un Hamiltonien.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x(1+y) \end{array} \right. ,\ b) \left\{ \begin{array}{l} x' = -x - y^2 \\ y' = y + x^2 \end{array} \right. ,\ c) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y + xy \\ y' = x + xy^4 + 2xy^2 \end{array} \right. ,\ d) \left\{ \begin{array}{l} x' = 2xy + 2y - 2x^2 \\ y' = 4xy - y^2 - 4x^3 \end{array} \right. .$$

Exercice 12 (Equation d'énergie)

Soit $q : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions maximales de $y'' + q(t)y = 0$ sont définies et bornées sur $\mathbb{R}^+$. (Pour la borne, on cherchera une quantité conservée dépendant de t, y et y'.)

Référence : Berthelin