Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 12 - **Système de Lotka-Volterra.**

Pour décrire l'évolution de deux espèces dont l'une est la proie de l'autre (par exemples des poissons et des requins), le système le plus simple est celui de Lotka-Volterra (aussi appelé système proie-prédateur). En notant $p(t)$ la quantité de proie du système en fonction du temps et $r(t)$ celui des prédateurs, il s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} p' & = & ap - bpr, \\ r' & = & -cr + dpr, \end{array}\right. \tag{1}$$

où a, b, c, d sont des constantes strictement positives.

Exercice 1 (Modélisation)

1) Expliquer la modélisation.

2) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \geq 0$ et $r_0 \geq 0$. Montrer l'existence d'une unique solution maximale de (1) pour la donnée initiale $p(t_0) = p_0$, $r(t_0) = r_0$.

3) Expliciter les solutions si $p_0 = 0$ ou $r_0 = 0$.

4) Notons I l'intervalle ouvert d'existence de la solution maximale associée à la donnée de Cauchy $p(t_0) = p_0 > 0$, $r(t_0) = r_0 > 0$. Montrons que $p(t) > 0$ et $r(t) > 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 2 (Solutions globales)

1) Montrer que la fonction $H(p, r) = dp + br - c \ln p - a \ln r$ sur $]0, +\infty[^2$ est une intégrale première du système.

2) Remarquons que

$$H(p, r) = F_{a,b}(r) + F_{c,d}(p)$$

avec $F_{\gamma,\delta}(u) = \delta u - \gamma \ln u$. Etudier les variations de $F_{\gamma,\delta}$ et montrer que cette fonction est minorée sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Solutions périodiques)

1) Quels sont les points stationnaires de (1) ?

2) Dcider le champ de vecteur du systme de Lotka-Volterra.

3) Découpons le quart de plan $p > 0, r > 0$ en quatre parties suivant ce champ de vecteur :

$$A = \{(p, r) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < p < \frac{c}{d},\, 0 < r \leq \frac{a}{b}\},$$

$$B = \{(p, r) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{c}{d} \leq p,\, 0 < r < \frac{a}{b}\},$$

$$C = \{(p, r) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{c}{d} < p,\, \frac{a}{b} \leq r\}$$

et

$$D = \{(p, r) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < p \leq \frac{c}{d},\, \frac{a}{b} < r\}.$$

Supposons par exemple que $(p_0, r_0) \in A$.

a) Montrer qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $p(t_1) = \frac{c}{d}$ et $0 < r(t_1) < \frac{a}{b}$.

b) Montrer qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $r(t_2) = \frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d} < p(t_2)$.

c) Montrer qu'il existe $t_3 > t_2$ tel que $p(t_3) = \frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b} < r(t_3)$.

d) Montrer qu'il existe $t_4 > t_3$ tel que $r(t_4) = \frac{a}{b}$ et $0 < p(t_2) < \frac{c}{d}$.

e) Montrer qu'il existe $t_5 > t_4$ tel que $p(t_5) = \frac{c}{d}$ et $0 < r(t_5) < \frac{a}{b}$.

f) Montrer que $(p(t_1), r(t_1)) = (p(t_5), r(t_5))$ et en déduire que la solution est périodique.

Exercice 4 (Autour de l'équation de Lotka-Volterra)

1) Calculer la moyenne sur une période de p et r.

2) On rajoute un prédateur pour les deux espèces (par exemple la pêche). Alors le système devient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p' & = & ap - bpr - k_1 p, \\ r' & = & -cr + dpr - k_2 r, \end{array} \right. \tag{2}$$

avec k_1, k_2 des constantes positives. Calculer les nouvelles moyennes sur une période. Que peut-on en déduire ?

3) Pour le système (1), on pose $dp(t) = c + \rho \cos\theta$ et $br(t) = a + \rho \sin\theta$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par (ρ, θ).

Exercice 5 (Equation logistique)

Soit l'équation différentielle

$$n' = rn - bn^2$$

avec r, b des constantes strictement positives que l'on considère sur $[0, +\infty[$.

1) Dessiner la fonction $f(n) = rn - bn^2$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit n une solution maximale définie pour les temps positifs sur $I = [0, \alpha[$ avec une condition initiale $n(0) = n_0 \geq 0$. Sans calculer l'expression des solutions, montrer les propriétés suivantes :

a) Si $n_0 > 0$, alors $n(t) > 0$ pour tout $t \in I$.

b) Si $n_0 < r/b$, alors $n(t) < r/b$ pour tout $t \in I$.

c) Si $n_0 > r/b$, alors $n(t) > r/b$ pour tout $t \in I$.

d) $\alpha = +\infty$.

e) Si $n_0 > 0$, alors $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} n(t) = \frac{r}{b}$.

f) Donner l'allure des solutions.

3) Calculer les solutions.

Réference : Berthelin