Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 16 - **Problèmes d'extremum.**

Exercice 1 (Calcul d'extrema)

1) Dans le cadre C^2, montrer que
a) si f admet un minimum en a, alors la hessienne de f en a vérifie $Hf(a) \geq 0$,
b) si a est un point critique de f et $Hf(a) > 0$, alors f admet un minimum en a.

2) Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$ sur $]-1/2, 1/2[^2$.

3) Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$ sur $]0, +\infty[^2$.

4) Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = e^{x \sin y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Fonction coercive)

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 3 (Extremums dans $\mathbb{R}^2$)

Rechercher les extremums dans $\mathbb{R}^2$ des fonctions $f(x, y) = x^2 + y^4$, $g(x, y) = x^2 + y^3$ et $h(x, y) = x^2 - y^2 + y^4/4$.

Exercice 4 (Extremums sur un compact)

Rechercher les extremums dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ de la fonction $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

Exercice 5 (Principe du maximum pour les fonctions harmoniques)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite harmonique sur U si elle est de classe C^2 et si $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} = 0$. On note B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité.

1) Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}$ et de classe C^2 sur B telle que $f|_S \leq 0$ et $\Delta f \geq 0$ sur B. On suppose qu'il existe $\xi \in B$ tel que $f(\xi) > 0$.

a) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la fonction $x \mapsto f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ atteint son maximum en un point $x_0 \in B$.

b) Montrer que $\Delta f(x_0) < 0$. Conclusion ?

2) Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}$ et harmonique sur B. Montrer que $\max\limits_S f = \max\limits_{\overline{B}} f$ et $\min\limits_S f = \min\limits_{\overline{B}} f$.

Références : Gourdon, Nourdin, Rouvière