Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 18 - **Fonctions monotones.**

Exercice 1 (Propriétés élémentaires)

1) Montrer qu'une fonction monotone admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point.

On rappelle que dans la feuille sur la connexité, on a montré les deux propriétés pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue avec I intervalle de $\mathbb{R}$:
$f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

3) Soit f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J. Montrer que f et f^{-1} sont continues.

Exercice 2 (Monotonie et dérivée)

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur l'intérieur de I.
1) Montrer que
a) f est croissante si et seulement si $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$.
b) f est décroissante si et seulement si $f'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$.

2) a) Donner un exemple de fonction strictement croissante pour laquelle $f'(t) > 0$ n'est pas vérifiée partout.
b) Montrer que si $f'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$, alors f est strictement croissante.
Remarque : la propriété est : f est strictement croissante si et seulement si $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$ et l'ensemble $X = \{t \in \mathring{I}\,;\, f'(t) = 0\}$ est d'intérieur vide.

3) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec $f'(0) > 0$ mais f n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

Exercice 3 (Points de discontinuité)

1) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

2) Montrer qu'il existe f fonction strictement croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ dont l'ensemble des points de discontinuité est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 4 (Fonctions à variations bornées)

Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour $\sigma = (\sigma_0 = a, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}, \sigma_n = b)$ une subdivision de longueur n de $[a, b]$, on pose $V(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|$ la variation de f sur σ.

On pose $V_I(f) = \sup\{V(f, \sigma)\,;\, \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ la variation totale de f sur $I = [a, b]$.

On dit que f est à variation bornée sur $[a, b]$ si $V_I(f) < +\infty$.

1) Calculer la variation totale de $f(x) = x^3/3 - 4x^2 + 15x$ sur l'intervalle $[1, 6]$.

Dans la suite, nous allons montrer le théorème de Jordan suivant : f est à variation bornée sur $[a, b]$ si et seulement si f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction dcroissante sur $[a, b]$.

2) Si f est monotone, calculer $V_I(f)$.

3) a) Montrer que $I \mapsto V_I(f)$ est croissante.

b) Soit $c \in]a, b[$, montrer que $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$.

4) a) Montrer que $x \mapsto V_{[a,x]}(f) - f(x)$ est croissante.

b) En déduire le théorème de Jordan.

c) En déduire qu'une fonction à variation bornée n'a qu'un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité.

5) a) Si f est de classe C^1, montrer que $\lim\limits_{|\sigma|\to 0} V(f,\sigma) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$.

b) Si f est continue, montrer que $\lim\limits_{|\sigma|\to 0} V(f,\sigma) = V_{[a,b]}(f)$.
(Question difficile : prendre une subdivision (de longueur $\tilde{n}$) qui permet d'approcher $V_{[a,b]}(f)$ à $\varepsilon/2$ près, puis utiliser la continuité uniforme de f pour $\varepsilon/(4(\tilde{n}+1))$.)

c) Montrer que si f est de classe C^1, alors $V_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$.

Références : Chambert-Loir tome 1, Hauchecorne, Pommellet, Ramis,