Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 19 - **Fonctions convexes.**

Exercice 1 (Convexité et régularité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec un I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Notons $p_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ la pente de f en $a \in I$.

1) Montrer que f est convexe si et seulement si la fonction p_a est croissante pour tout $a \in I$.

2) Supposons f convexe. Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. Montrer que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

3) Si f est convexe, alors f admet en tout point de l'intérieur de I des dérivées à droite et à gauche.

4) Si f est convexe, alors f est continue sur l'intérieur de I.

5) Donner un exemple de fonction convexe non continue.

6) Supposons f dérivable sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

7) Supposons f deux fois dérivable sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

8) Supposons f convexe et dérivable. Soit C_f la courbe représentative de la fonction f. Montrer que f est convexe si et seulement si C_f est située au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

Exercice 2 (Inégalités de convexité)

1) Montrer que $\sin x \geq 2x/\pi$ sur $[0, \pi/2]$.

2) Montrer l'inégalité arithmético-géométrique

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$.

3) Déterminer le maximum du produit des distances d'un point intérieur M à un tétraèdre régulier $T = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ aux côtés de T.

4) Montrer que $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ et p, q deux réels > 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

5) Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

pour tous $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}^+$ et p, q deux réels > 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

6) Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

pour tous $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}^+$ et p un réel ≥ 1. (Dans le cas $p > 1$, utiliser la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\left(\sum_{i=1}^{n} |\cdot|^q\right)^{1/q}$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.)

7) Montrer l'inégalité de Jensen :

$$\Phi\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \leq \int_0^1 \Phi \circ f(t)\,dt$$

pour $f : [0,1] \to I$ continue et $\Phi : I \to \mathbb{R}$ continue, convexe avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Convexité et comportement sur $\mathbb{R}$)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe.

a) Montrer que $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe.

b) Si $l \in \mathbb{R}$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - lx$ existe.

Exercice 4 (Une caractérisation de la fonction Γ)

Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, on définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ la fonction Γ d'Euler. On rappelle que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

1) Montrer que $\ln\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ vérifiant $f(x+1) = xf(x)$, $f(1) = 1$ et telle que $\ln f$ est convexe.

a) Soient $x, y > 0$ et $0 \leq t \leq 1$. Posons $z = tx + (1-t)y$. Montrer que

$$z\cdots(z+n)f(z) \leq \Big(x\cdots(x+n)\Big)^t \Big(y\cdots(y+n)\Big)^{1-t} f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

b) Montrer que

$$\frac{f(z)}{\Gamma(z)} \leq \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^t \left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-t}.$$

c) Montrer que $f = \Gamma$.

Références : Chambert-Loir tome 2, Gourdon, Hauchecorne, Pommellet